Fundamentos de Análisis Numérico para estudiantes de Ingeniería

Sergio Velásquez, Caroní, Bolívar, VENEZUELA
Depósito Legal lfi-085-2015-620-937
ISBN: 978-980-12-7937-2

Sergio Velásquez, Ronny Velásquez
Fundamentos de Análisis Numérico para estudiantes de Ingeniería®
Sergio Velásquez, Ciudad Guayana, 2015
ISBN: 978-980-12-7937-2
Materia: Analísis Numérico
Formato 195x285 pag.261

Indíce

La elaboración de este libro de Análisis Numérico, surgió de la necesidad de contar con un material que incluya todos los contenidos exigidos por la cátedra del mismo nombre, considerando que los tratados sobre Análisis numérico, no son de uso corriente, es más, su estudio y escritos se limitan a pocos autores.

Este libro de Análisis Numérico está dividido en capítulos bien diferenciados, para facilitar su estudio en forma organizada y didáctica, presentando algunas características que facilitan el estudio y aprendizaje de cada contenido. Entre estas características se tienen que:

Cada contenido cuenta con los teoremas que sustentan matemáticamente y definen los contenidos desarrollados. Si bien la mayoría de los teoremas se presentan sin demostración, en cada caso se citan las fuentes, para acceder a tales demostraciones.

Al final de cada capítulo se presentan abundantes ejercicios de consolidación, con las soluciones incluidas, que serán de utilidad a la hora de realizar la verificación de los ejercicios de consolidación después de resolverlos.

Espero que este libro de Análisis Numérico, sea de verdadera utilidad para cada estudiante, en la tarea de estudiar, comprender y aprender el Análisis Numérico.

CAPÍTULO 0

GENERALIDADES

Algunos conceptos fundamentales

El análisis numérico es una rama de las matemáticas cuyos límites no son del todo precisos. De una forma rigurosa, se puede definir como la disciplina ocupada de describir, analizar y crear algoritmos numéricos que nos permitan resolver problemas matemáticos, en los que estén involucradas cantidades numéricas, con una precisión determinada.

En el contexto del cálculo numérico, un algoritmo es un procedimiento que nos puede llevar a una solución aproximada de un problema mediante un número finito de pasos que pueden ejecutarse de manera lógica. En algunos casos, se les da el nombre de métodos constructivos a estos algoritmos numéricos.

Los ordenadores son útiles para cálculos matemáticos extremadamente complejos, pero en última instancia operan con números binarios y operaciones matemáticas simples. Desde este punto de vista, el análisis numérico proporcionará todo el andamiaje necesario para llevar a cabo todos aquellos procedimientos matemáticos susceptibles de expresarse algorítmicamente, basándose en algoritmos que permitan su simulación o cálculo en procesos más sencillos empleando números.

El Análisis Numérico también consiste en procedimientos que resuelven problemas y realizan cálculos puramente aritméticos, tomando en cuenta las características especiales y limitaciones de los instrumentos de cálculo (como las calculadoras y computadoras, programas informáticos, etc.) que ayudan en la ejecución de las instrucciones del algoritmo.

El análisis numérico es importante porque es necesario en la solución de muchos problemas del mundo real.

El análisis numérico es el desarrollo y el estudio de procedimientos para resolver problemas con ayuda de una computadora.

La ventaja fundamental del análisis numérico es que puede obtenerse una respuesta numérica, aun cuando un problema no tenga solución analítica.

La solución obtenida con análisis numérico siempre es numérica.

Los resultados numéricos pueden trazarse en forma de grafica para mostrar el comportamiento de la solución.

El resultado del análisis numérico es una aproximación, aunque los resultados pueden hacerse tan exactos como se quiera. A fin de obtener la máxima exactitud es necesario efectuar una cantidad enorme de operaciones por separado.

Las aplicaciones del Análisis numérico son muy amplias, y entre las operaciones que se pueden realizar con ella se citan algunas:

— Resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales.
— Obtención de soluciones de un sistema de ecuaciones no lineales.
— Interpolación para encontrar valores intermedios en una tabla de datos.
— Encontrar aproximaciones eficientes y eficaces de funciones.
— Aproximación de derivadas de cualquier orden para funciones, incluso cuando la función se conoce solo como una tabla de valores.
— Integración de cualquier función, aun cuando solo se conozca como una tabla de valores.

— Obtención de integrales múltiples.
— Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de valores iniciales de las variables pudiendo ser de cualquier orden y complejidad.
— Resolución de problemas con valor en la frontera y determinación de valores característicos y vectores característicos.
— Obtención de soluciones numéricas para todos los tipos de ecuaciones diferenciales parciales.
— Ajuste de curvas a datos mediante la aplicación de métodos numéricos variados.

Los métodos numéricos requieren operaciones aritméticas tan tediosas y repetitivas, que solo cuando se cuenta con una computadora que realice tantas operaciones por separado es práctico resolver problemas de esta forma.

Para que una computadora pueda realizar el análisis numérico debe escribirse un programa.

La iteración es un procedimiento que consiste en elaborar una sucesión de operaciones, cada una de las cuales aplica los resultados de la operación precedente. Muchos procedimientos de análisis numérico son iterativos.

Para resolver un problema científico o de ingeniería hay que seguir cuatro pasos generales:

— Plantear claramente el problema.
— Obtener un planteamiento matemático del problema.
— Resolver la ecuación o ecuaciones que resulten del paso 2.
— Interpretar el resultado numérico para llegar a una decisión. Es la parte más difícil en la resolución de problemas.

Análisis numérico.

Es el diseño, uso y análisis de algoritmos, los cuales son conjuntos de instrucciones cuyo fin es calcular o aproximar alguna cantidad o función.

El estudio del análisis numérico se interesa en la creación y comprensión de buenos métodos que resuelvan problemas numéricamente. Una característica importante del estudio de los métodos es su variación.

El análisis numérico consiste en procedimientos que resuelven problemas y realizan cálculos puramente aritméticos, teniendo en cuenta las características especiales y limitaciones de los instrumentos de cálculo, como las calculadoras o las computadoras, que facilitan enormemente la ejecución de las instrucciones del algoritmo.

El estudio del análisis numérico facilita la comprensión de los conceptos matemáticos puros, sobre todo teniendo en cuenta que observando cómo algunos de ellos deben modificarse necesariamente en las matemáticas computacionales.

Después de todo, el análisis numérico es importante porque es necesario en la solución de muchos problemas del mundo real.

Métodos numéricos.

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales se posibilitan formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas. Hay muchos tipos de métodos numéricos, y comparten una característica común: Son iterativas, o sea, invariablemente se deben realizar un buen número de tediosos cálculos aritméticos.

Los métodos numéricos son herramientas muy poderosas para la solución de problemas. Pueden manejar sistemas de ecuaciones grandes, no lineales y geometrías complicadas, comunes en la ingeniería. También es posible que se utilice software disponible comercialmente que contenga métodos numéricos. El uso inteligente de estos programas depende del conocimiento de la teoría básica de estos métodos; además hay muchos problemas que no pueden plantearse al emplear programas hechos. Un buen conocimiento de los métodos numéricos permite diseñar programas propios aplicables a utilidades específicas. Con los métodos numéricos se aprende a conocer y controlar los errores de aproximación que son inseparables de los cálculos numéricos a gran escala.

Las situaciones que se verán con bastante frecuencia en el estudio del cálculo numérico son las aproximaciones y los errores, sean estos pequeños o importantes, por lo tanto, el análisis de una situación problemática y los márgenes necesarios de precisión deben delimitar los criterios a ser utilizados en cada situación, sean estos referidos a los errores tolerables o las precisiones necesarias para la obtención de resultados confiables.

CAPITULO I

TEORÍA DE ERRORES

Introducción

En la actividad matemática, la ingeniería, la informática y muchas otras ciencias, existen fenómenos muy variados que necesariamente deben ser representados por modelos matemáticos. Estos modelos, por su complejidad o por características particulares no presentan soluciones exactas y las más de las veces no son fáciles de hallarlas, y es aquí, donde los métodos numéricos proporcionan soluciones aproximadas a los problemas que surgen de situaciones muchas veces no solucionables por métodos matemáticos tradicionales.

El cálculo numéricos es aquel que aplicando métodos obtiene resultados numéricos que se aproximan a los resultados exactos que se obtendrían aplicando la solución analítica de un problema; estos resultados pueden ser hallados con la precisión que se desee y precisando con anterioridad los márgenes de errores de acuerdo a la rigurosidad y precisión de los resultados esperados.

Los métodos numéricos se utilizan para resolver problemas que presentan dificultad para hallar soluciones por medio de los métodos analíticos tradicionales, o situaciones problemáticas que no sean sencillos de resolverlos. Estos métodos proporcionan una sucesión de valores que se aproxima a la solución del problema.

Al resolver un problema por métodos numéricos se tendrán siempre presente los errores, siendo éstos de distintos tipos.

Al aplicar un método numérico a cualquier situación problemática, se debe emplear un criterio de convergencia, citando con antelación la precisión que se necesite de acuerdo al tipo de problema a solucionar.

Al final, el objetivo de los Métodos Numéricos es simplemente resolver problemas numéricos complejos utilizando operaciones matemáticas simples, con el fin de desarrollar y evaluar métodos para calcular resultados numéricos a partir de los datos proporcionados, denominándose algoritmos a estos métodos de cálculo.

Aproximación numérica

En la práctica, los cálculos realizados y los resultados esperados no siempre son exactos, sobre todo en la ciencia y la ingeniería, y muchas veces se debe estar conforme con los resultados obtenidos que son aproximaciones bastantes precisas y validas, brindadas por los métodos numéricos.

Por la dificultad que presenta muchas veces elaborar un modelo matemático que se acerca o sea válida para lo que se desea, los resultados obtenidos de tales modelos son casi siempre aproximados; debido a simplificaciones en la elaboración de los modelos y muchas veces por no tomar todos los factores que afectan a un determinado fenómeno. Un ejemplo simple de física seria lo referido a problemas de caída libre, donde se desprecia el rozamiento del aire con el cuerpo en caída libre, sin embargo, en ciertas condiciones, esta situación puede ser muy importante y muy relevante en la solución real del problema.

Modelos matemáticos:

Un modelo matemático es uno de los tipos de modelos científicos que emplea formulaciones matemáticas para expresar relaciones, proposiciones, variables, parámetros, entidades y las relaciones entre variables, operaciones o entidades, para analizar y estudiar comportamientos de sistemas complejos ante situaciones difícilmente observables en la realidad.

En matemáticas el significado de modelo matemático, es un poco diferente, pues se trabaja con modelos formales. Un modelo formal para una determinada teoría matemática es un conjunto sobre el que se han definido un conjunto de relaciones, que satisface las proposiciones derivadas del conjunto de axiomas de la teoría. La teoría de modelos es la encargada de estudiar sistemáticamente las propiedades de los modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos requieren de parámetros, que en la mayoría de los casos provienen de mediciones experimentales y, por lo tanto, tienen una precisión limitada, que depende de factores externos como los instrumentos de medición, el clima o los métodos aplicados.

Los modelos matemáticos resultantes de una modelización normalmente son imposibles de resolver por métodos analíticos conocidos y la solución deseada solamente es posible aproximar por métodos numéricos. Por ejemplo una ecuación de quinto grado.

Errores

Los métodos numéricos presentan errores inevitables, por lo tanto se debe considerar tal situación como algo inherente al cálculo numérico.

Error absoluto:

Definición 1. *Si* $x \in \mathbb{R}^n$ y $x^* \in \mathbb{R}^n$, *es una aproximación a x, se define el error absoluto como:*

$$E = |x - x^*|$$

En forma práctica puede representarse el valor verdadero con V_V y el valor aproximado con V_A, esto es por el excesivo uso de la x en este material, por lo tanto, el error absoluto también puede definirse como la diferencia entre el valor verdadero y el valor aproximado y se representarse por:

$$E = |V_v - V_A|$$

Teorema 1.

El error absoluto de una suma es igual a la suma algebraica de los errores absolutos de los términos que participan en dicha operación.

En varios números aproximados en el mismo sentido, el error absoluto de la diferencia es menor que el mayor de los errores absolutos de sus términos. El sentido del error es del mismo sentido si el error del minuendo es mayor que el del sustraendo, y de distinto sentido en caso contrario.

Ejemplo 1.

Sea la cantidad exacta 5 y el número aproximado 5,3. Sea la cantidad exacta 2 y el número aproximado 2,1. Verifica si se cumple el Teorema 1.

Solución

Sea la cantidad exacta 5 y el número aproximado 5,3. El error absoluto es: 0,3.

Sea la cantidad exacta 2 y el número aproximado 2,1. El error absoluto es: 0,1

Luego: 5 - 2 = 3; diferencia entre las cantidades exactas.

5,3 - 2,1 = 3,2; diferencia entre las cantidades aproximadas.

0,3 - 0,1 = 0,2; diferencia entre los errores absolutos.

El error absoluto de la diferencia es 0,2, y 0,3 es el mayor error absoluto de uno de sus términos; por lo tanto:

0,2 < 0,3, cumple la condición. El error es del mismo sentido ya que el error del minuendo es mayor que el error del sustraendo.

Ejemplo 2.

Sean: 8, 2 y 10 los números exactos y su suma: 8 +2 + 10 = 20. Sean: 8,2; 2,1 y 10,2 los números aproximados y su suma: 8,2 + 2,1 + 10,2 = 20,5. Hallar el error absoluto.

Solución

$$E = |V_v - V_A| = 0{,}5$$

La suma algebraica de los errores absolutos es: 0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,5

Ejemplo 3.

Sea el resultado de una operación en donde se comprueba que el valor exacto es 8 y El valor aproximado hallado es 8,2. Calcular el error absoluto.

Solución

$$E = |V_v - V_A| = |8 - 8.2| = 0.2$$

Existen varias maneras de representar el error absoluto, una de las formas también utilizada con frecuencia es.

$$e_a = |x - x^*| \quad \text{o} \quad e_a = |x - \bar{x}|$$

Error relativo:

Definición 2. *Si* $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $x^* \in \mathbb{R}^n$, *es una aproximación a x, se define el error absoluto como:*

$$E_r = \frac{|x - x^*|}{|x|}; x \neq 0$$

En forma práctica, el error relativo se define como el cociente entre en error absoluto y el valor verdadero, se representa por:

$$E_r = \frac{|V_v - V_A|}{|V_v|} = \frac{E}{|V_v|}; V_v \neq 0$$

Teorema 2.

El error relativo de una suma de varios números aproximados está situado entre el menor y el mayor de los errores relativos de los sumandos, mientras tales números presenten errores relativos del mismo sentido.

Ejemplo 4.

Sean: 2, 10 y 5 los números exactos y sean: 2,1; 10,2 y 5,3 los números aproximados respectivamente. Demostrar el cumplimiento del Teorema 2

Solución

Sean: 2, 10 y 5 los números exactos y su suma: 2 +10 + 5 = 17

Sean: 2,1; 10,2 y 5,3 los números aproximados y su suma:

2,1 + 10,2 + 5,3 = 17,6

El error absoluto de la suma es: 17,6 - 17 = 0,6

El error relativo de la suma es: $\frac{0.6}{17}$ = 0,035294117

El error relativo de cada sumando es: 0,05; 0,02 y 0,06

Luego: 0,02 < 0,0352< 0,06

Por lo tanto cumple la condición.

Teorema 3.

Dos números tienen el mismo valor que la suma de los errores relativos de los factores más el producto de esos mismos errores.

Ejemplo 5.

Sean: 5 y 10 los números exactos y sean 5,3 y 10,2 los números aproximados, respectivamente. Realiza las operaciones para demostrar el Teorema 3

Solución

Sean: 5 y 10 los números exactos y su producto: 5 x 10 = 50

Sean 5,3 y 10,2 los números aproximados y su producto: 5,3 x 10,2 = 54,06 El error absoluto del producto es: 54,06 - 50 = 4,06

El error relativo es: $\frac{4.06}{50}$ = 0,0812

El error relativo entre 5 y 5,3 es 0,06 El error relativo entre 10 y 10,2 es 0,02 Luego: 0,06 + 0,02 + (0,06 x 0,02) = 0,06 + 0,02 + 0,0012 = 0,0812. Por lo tanto cumple la condición al tener la igualdad: 0.0812 = 0,0812

Teorema 4.

El error relativo del cociente de dos números dados es igual a la suma o la diferencia de los errores relativos de los datos, dividida por el menor más uno.

Ejemplo 6.

Sean: 8 y 2 los números exactos, y cuyos números aproximados respectivamente sean: 8,2 y 2, Verificar el Teorema 4

Solución

Sean: 8 y 2 los números exactos y su cociente: $\frac{8}{2} = 4$

Sean: 8,2 y 2,1 los números aproximados y su cociente: 8,2 / 2,1 = 3,904...

El error absoluto es: 3,904 - 4 = - 0,096...

El error relativo es: $\frac{-0.096}{4} = -0{,}024$ El error relativo entre 8 y 8,2 es 0,025. El error relativo entre 2 y 2,1 es 0,05

Luego: $\frac{0{,}025 - 0{,}05}{0{,}025\ 1} = \frac{-0{,}025}{1{,}025} = -0{,}024$

Errores inherentes

Estos errores se deben principalmente a aquellos datos obtenidos experimentalmente y que corresponden a los datos de entrada de un problema, debido principalmente al instrumento de medición empleado, como a las condiciones de realización del experimento.

Errores de truncamiento

Estos errores son originados por aproximación de soluciones analíticas de un determinado problema por medio de métodos numéricos

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots , \qquad -\infty < x < \infty \quad \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por medio de la serie de Taylor se evalúa la función exponencial, que dicho sea de paso, es una serie infinita. Siendo imposible tomar todos los términos de la serie, se requiere cortar o truncar dicha serie después de cierto número de términos. Esta situación introduce a un error, que es el error de truncamiento, que depende del método numérico empleado e independiente de la manera de realizar los cálculos.

Los errores de truncamiento tienen relación con el método de aproximación que se usará ya que generalmente frente a una serie infinita de términos, se tenderá a cortar el número de términos, introduciendo en ese momento un error, por no utilizar la serie completa (que se supone es exacta).

Error numérico total

El error numérico total se entiende como la suma de los errores de redondeo y truncamiento introducidos en el cálculo.

Pero aquí surge un gran problema. Mientras más cálculos se tengan que realizar para obtener un resultado, el error de redondeo se irá incrementando. Pero por otro lado, el error de truncamiento se puede minimizar al incluir más términos en la ecuación, disminuir el paso o proseguir la iteración (o sea mayor número de cálculos y seguramente mayor error de redondeo).

Entonces, ¿qué criterio utilizar? ...lo ideal sería determinar el punto en que los errores de donde empiezan a ocultar la ventaja de considerar un menor error de truncamiento. En la práctica se debe considerar que actualmente las computadoras tienen un manejo de cifras significativas mucho mayor que antes por lo que el error de redondeo se minimiza enormemente, aunque no se debe dejar de considerar su aporte al error total.

Errores de redondeo

Estos errores se presentan al realizar los cálculos que todo método numérico o analítico requieren y se deben a la imposibilidad de tomar todas las cifras que resultan de operaciones aritméticas como productos y cocientes, teniendo que retener en cada operación el número de cifras que permita el instrumento de cálculo, normalmente, una calculadora. En este tipo de error existen dos situaciones que pueden perjudicar la precisión de la operación y son:

a- Cuando se suman una sucesión de números, especialmente si estos decrecen en valor absoluto.

b- Cuando se halla la diferencia entre dos números casi idénticos, ya que se cancelan los dígitos principales.

Cuando las cantidades estudiadas pertenecen a los números irracionales las calculadoras y los computadores cortan los números decimales introduciendo así un error de redondeo. Para ilustrar, un ejemplo; el valor de "e" se conoce como 2.718281828... hasta el infinito.

Si se corta el número en 2.71828182 (8 cifras significativas luego del punto decimal) se está obteniendo u error de $e = 2.718281828 - 2.71828182 = 0.000000008\ldots$

Sin embargo, considerando que el número que seguía al corte era mayor que 5, entonces conviene dejar el número como 2.71828183, caso en el cual el error sería solo de $e = 2.118281828 - 2.11828183 = -0.000000002..$, que en términos absolutos es mucho menor que el anterior.

En general, el error de corte producido por las computadoras será muy inferior al error introducido por un usuario, que generalmente corta a un menor número de cifras significativas. Dependiendo de la magnitud de los números con los que se trabaja, el error de redondeo puede tener incidencia importante en el cálculo final.

Redondeo de un número

Con el redondeo de un número lo que se pretende es escribir un numero con menor cantidad de dígitos significativos, representando dicha cantidad con el menor error posible.

Para redondear un número se fija a que cifra significativa se va a redondear dicho número. Si el número a la derecha de la cifra fijada es mayor o igual a 5, se suma uno en el lugar donde se quiere redondear, si es menor a 5, se deja el número donde se quiere redondear sin agregarle nada.

Ejemplo 7.

Redondea los siguientes números a tres dígitos significativos:

a) 27,0670 b) 37,23 c) 7,415

Solución

a) 27,0670 = 27,1 b) 37,23 = 37,2 c) 7,415 = 7,42

Ejemplo 8.

Redondea las siguientes cantidades a números enteros:

a) 23,617 b) 237,21 c) 7,5

Solución

a) 23,617 = 24 b) 237,21 = 237 c) 7,5 = 8

Ejemplo 9.

Redondea las siguientes cantidades a dos cifras decimales: a) 57,2367 b) 0,789 c) 92,3341

Solución

a) 57,2367 = 57,24

b) 0,789 = 0,79

c) 92,3341 = 92,33

Redondeo truncado

El redondeo truncado consiste en truncar el resultado de una operación al número de cifras significativas que se estén utilizando. Por ejemplo sí se redondea -$\frac{3}{7}$ a cuatro cifras se significativas se tiene 0.4285

Redondeo simétrico

El redondeo simétrico consiste en aumentar en uno la última cifra retenida sí la primera cifra descartada está entre 5 y 9, o dejarla igual sí la primera cifra descartada está entre 0 y 4. Por ejemplo sí se redondea $\frac{3}{7}$ a 4 cifras significativas tenemos 0.4286.

Para verificar estos dos tipos de errores, se realiza la siguiente operación:

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$$

Empleando únicamente 4 cifras significativas y usando los dos tipos de redondeo. Se obtiene:

0.4285 + 0.5714 = 0.9999 (Redondeo truncado)

0.4286 + 0.5714 = 1.0000 (Redondeo simétrico)

Se concluye que por lo general el redondeo simétrico lleva a resultados más precisos.

Error porcentual

Este tipo de error consiste simplemente en el error relativo expresado en por ciento (%). Se expresa matemáticamente por:

$$E_r = E_r\% = \frac{|x - x^*|}{|x|}100\%; x \neq 0$$

$$E_r = E_r\% = \frac{|V_v - V_A|}{|V_v|}100\% = \frac{E}{|V_v|}100\%;\ V_v \neq 0$$

Ejemplo 10.

Calcular la función $sen\,x$, para x = 2 por métodos numéricos y halla su error absoluto, el error relativo y el error porcentual. Considera el cálculo de sen x con S_3.

Solución

Calcular el valor de la función $sen\,(2)$ mediante su serie de Taylor. La serie de Taylor de la función seno es:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots ,$$

$$-\infty < x < \infty \quad \sum_{x=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Como es imposible realizar la suma total de la serie, se debe truncarla en algún punto, así se obtiene la sucesión:

$$x, x - \frac{x^3}{3!}, x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Si se denota como

$$S_0 = x, S_1 = x - \frac{x^3}{3!}, S_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, S_3 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Se obtiene la sucesión: $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots, S_7$

El límite será:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = sen\, x$$

Calculo de sen x con S_3 partiendo de la serie de Taylor para la función seno:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots ,$$

$$-\infty < x < \infty \quad \sum_{x=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$sen(2) = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!}$$

$$\text{sen}(2) = 2 - 1.33333 + 0.26666 - 0.02540 = 0.90793$$

El valor verdadero es $\text{sen}(2) = 0.909297426$

Calculo de error

$$E = |V_v - V_A| = |0.909297426 - 9.90793| = 0.001367426$$

$$E_r = E_r = \frac{|V_v - V_A|}{|V_v|} = \frac{E}{|V_v|} = \frac{0.001367426}{|0.909297426|} = 0.001503826978$$

$$E_r\% = 0.001503826978 x 100\% = 0.15\%$$

Ejemplo 11.

Calcular la función $sen\, x$, para $x = 2$ por métodos numéricos y halla el error absoluto, el error relativo y el error porcentual. Considera el cálculo de sen x con S4.

Solución

Calculo de sen x, con S_4 partiendo de la serie de Taylor para la función seno

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots ,$$

$$-\infty < x < \infty \quad \sum_{x=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$sen(2) = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!}$$

$$sen(2) = 2 - 1.333333 + 0.266667 - 0.025397 + 0.001411$$
$$= 0.909348$$

El valor verdadero es sen(2) = 0.909297426

Calculo de error

$$E = |V_v - V_A| = |0.909297426 - 0.09348| = 0.000050574$$

$$E_r = E_r = \frac{|V_v - V_A|}{|V_v|} = \frac{E}{|V_v|} = \frac{0.000050574}{|0.909297426|} = 0.0000556188$$

$$E_r\% = 0.0000556188x100\% = 0.00556\%$$

Conclusión: al comparar los resultados hallados en los ejemplos 3 y 4, se verifica que la precisión del valor hallado es consistente con el valor real o verdadero, sin embargo se nota que con una sola iteración mas, la precisión aumentó enormemente, pasando de un error porcentual de 0.15% de S_3 a 0.00556% de S_4, que puede considerarse valor totalmente apropiado para la función buscada.

Cada caso presenta situaciones particulares, puede suceder que, como en este caso, con muy pocas iteraciones se pueda conseguir un resultado óptimo; sin embargo hay otros casos similares en que no sucede tal cosa.

Existen situaciones en que debido a la gran cantidad de cálculos realizados, los redondeos propios de toda operación numérica crece tanto en valor absoluto, que los resultados obtenidos a veces ni siquiera tienen sentido, el error crece en forma exponencial y el método no presenta estabilidad. Mientras más operaciones se realizan la posibilidad de error aumenta.

Cifras significativas

Cuando se emplea un número en un cálculo, debe haber seguridad de que pueda usarse con confianza. El concepto de cifras significativas tiene dos implicaciones importantes en el estudio de los métodos numéricos.

Los métodos numéricos obtienen resultados aproximados. Por lo tanto, se debe desarrollar criterios para especificar que tan precisos son los resultados obtenidos.

Aunque ciertos números representan número específicos, no se pueden expresar exactamente con un número finito de cifras.

El número de cifras significativas es el número de dígitos que se puede usar con plena confianza. Las cifras significativas se han desarrollado para designar formalmente la confiabilidad de un valor numérico.

Muchos de los cálculos contenidos en los problemas de la vida real tratan con valores aproximados, entendiéndose que en toda medición existen errores, que la precisión en las mediciones y en los cálculos es casi imposible.

Los dígitos significativos se encuentran contando los números de izquierda a derecha, partiendo del primer dígito no cero y terminando en el último dígito presente.

Es conjunto de dígitos confiables o necesarios que representan el valor de una magnitud independiente de las unidades de medidas utilizadas. El total de cifras significativas es independiente de la posición del punto decimal.

Los ceros a la izquierda de dígitos no nulos, nunca serán cifras significativas, mientras que los ceros intermedios de dígitos no nulos, siempre serán cifras significativas.

Ejemplo 12.

Longitud = 26 mm = 0,026 m = 0,000026 km (dos cifras significativas)

Estatura = 1,72 m = 17,2 dec. = 172 cm (tres cifras significativas)

40072 (cinco cifras significativas)

3.001 (cuatro cifras significativas)

0,000203 (tres cifras significativas)

Exactitud y Precisión.

La exactitud se refiere a que tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero. La precisión se refiere a qué tan cercano está un valor individual medido o calculado respecto a los otros.

La inexactitud se define como un alejamiento sistemático de la verdad. La imprecisión, sobre el otro lado, se refiere a la magnitud del esparcimiento de los valores. Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente exactos o sin sesgos para que cumplan los requisitos de un problema particular de ingeniería.

Así, si se desea que el cálculo tenga un error menor al criterio para dos cifras significativas, se deben obtener números que correspondan o sean menor a:

$$(0{,}5\ x\ 10 - 2) \ = \ 0{,}5\%$$

Esto servirá para determinar cuántos términos serán necesarios en un cálculo aproximado para tener la certeza que el error se encuentra bajo el margen especificado.

Ejemplo 13.

Subraya los dígitos significativos de cada cantidad.

Solución Los dígitos significativos en los siguientes números están subrayados.

a) 621,39 b) 7,400 c) 0,000230 d) 0,003

Precisión

En el cálculo numérico, la precisión se refiere al número de cifras significativas que representan una cantidad.

Exactitud

La exactitud se refiere al grado de aproximación que se tiene de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa, o sea, que tan cerca está del valor buscado. Por ejemplo, sí se lee la velocidad del velocímetro de un auto, esta tiene una precisión de 3 cifras significativas y una exactitud de $\pm$5kph.

Números en la computadora

La computadora es un dispositivo de cálculo, ésta trabaja con un conjunto de números, que no es precisamente el de los números reales.

El conjunto de los números reales, presenta algunas características como:

Es infinito en ambos extremos.

Es continuo.

Cada número puede tener una cantidad ilimitada de cifras.

Los números pueden ser tan pequeños como se desee.

El conjunto de los números que se manejan en una computadora presenta las siguientes características:

Es finito en ambos extremos.

No es continuo.

Cada número tiene una cierta cantidad máxima de cifras.

Los números no pueden ser tan pequeños como se desee.

Una computadora almacena los números en sistema binario, usando un número determinado de bytes, dependiendo del tipo de dato y de la computadora que se emplee, presentando las siguientes características:

Existe un límite al intervalo de valores que se puede manejar.

Se limita la cantidad de cifras que se emplean para representar un número.

El conjunto de números no es continuo sino discreto. O sea, existen huecos entre un número y otro.

Producen errores de redondeo

Al convertir los números al sistema binario.

Cuando el resultado es muy pequeño y la capacidad de representarlo es superada, se redondea comúnmente a 0.

Cuando el resultado es muy grande y puede ocasionar un error al aproximarse al mayor valor que se pueda representar.

La computadora funciona o trabaja con lo que se conoce como aritmética de dígitos finitos, causando que ciertos hechos que se toman como ciertos, no lo sean en un momento dado, generando cálculos aritméticos que ocasionan más error

La aritmética de dígitos finitos lleva a resultados aceptables. Cualquier operación numérica tiene sus casos problemáticos y los más comunes son:

División entre números cercanos a 0.

Multiplicación por números grandes.

Suma de cantidades de distinto orden de magnitud.

Resta de números casi iguales.

Propagación de errores

Los métodos numéricos generalmente consisten en la realización de muchos cálculos, y esta situación no permite predecir qué efecto producirá al resultado el error de redondeo que se acumula en cada operación. Para estimar el efecto del error de redondeo que se acumula y de las posibilidades de corrección, se aplican las siguientes situaciones:

Uso de la aritmética de precisión doble, que consiste en resolver el problema dos veces, una con aritmética de precisión simple y otra con aritmética de precisión doble. La solución se toma considerando solo las cifras que no hayan cambiado. El inconveniente es que los cálculos de precisión doble toman más tiempo que los de precisión simple, además de resolver dos veces el mismo problema.

Uso de la aritmética de intervalo, que consiste en retener en cada paso el valor más pequeño y más grande que puede tomar el valor buscado, para que al final se obtenga un intervalo que contenga el valor real. El inconveniente que presenta este procedimiento es que no se sabe con exactitud en qué parte del intervalo estará la solución, aunque comúnmente se supone que a la mitad; esta situación consume el doble de tiempo y memoria al almacenar los límites superior e inferior en los que puede estar la solución.

Uso de aritmética de dígitos significativos, que consiste en retener en cada etapa solo las cifras que se piensa son significativas. La desventaja es que se pierde información y no se tiene certeza de que tan significativa es una cifra.

Enfoque estadístico, consiste en suponer un comportamiento aleatorio con una distribución de probabilidad conocida. De todas las aplicaciones posibles para mejorar y precisar los resultados numéricos es el que ha dado mayor éxito.

Los tipos de errores mencionados anteriormente se propagan de distinta manera. Para estudiar la forma de propagación de los errores en conjunto, hay que definir dos conceptos nuevos, la estabilidad y la convergencia

La estabilidad

Todo problema requiere datos de entrada, que origina por lo menos una salida. Sí cambios pequeños en los datos de entrada producen cambios pequeños en la salida, se dice que el algoritmo es estable o problema bien condicionado, en caso contrario se dice que el algoritmo es inestable o problema mal condicionado.

Si el error después de n operaciones se puede representar por $f(n) = kn^{\varepsilon}$, se dice que el error es lineal. En cambio si el error se representa por $f(n) = k^{n}\varepsilon$ para k > 1, el crecimiento del error se dice que es exponencial. k es una constante independiente de n.

El crecimiento del error lineal es por lo general inevitable, y cuando k y n son pequeños, los resultados son aceptables. El crecimiento del error exponencial debe ser evitado, ya que el término k^n será grande, aun para valores relativamente pequeños de n. Por lo tanto sí el crecimiento del error es lineal el método es estable y si es exponencial es inestable.

La convergencia

Los métodos numéricos obtienen n términos de una sucesión de valores. Comenzando con un valor inicial que sea una aproximación de la solución de un problema x_0. Aplicando un método numérico se obtiene otra aproximación x_1. El procedimiento se repite para obtener x_2 y así sucesivamente, es decir, se generar la sucesión x_0, x_1, x_2,..., x_n; donde todos los términos son aproximaciones a la solución del problema. Sí la sucesión obtenida al cabo de n iteraciones tiende a un límite se dice que el método es convergente, en caso contrario el método es divergente.

Criterio de convergencia.

Definición 3. *Por definición de convergencia se tiene que si un método numérico es convergente, entonces debe ocurrir que:* $lim_{n\to\infty} x_n = x$

En la práctica esto es imposible de conseguir, razón por la cual se debe optar por algún criterio que permita decidir si existe o no la convergencia. Este criterio se denomina criterio de convergencia. El criterio de convergencia puede implementarse usando los parámetros de cuantificación del error., que son: el error absoluto, error relativo y error porcentual: La convergencia existe cuando:

Error absoluto: $\lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} x - x_n = 0$

Error relativo: $\lim_{n\to\infty} E_{rn} = \lim_{n\to\infty} \frac{x-x_n}{x} = 0$

Error porcentual: $\lim_{n\to\infty} E_{\%n} = \lim_{n\to\infty} 100E_{rn} = 0$

Estos criterios son simplemente teóricos, porque no presenta practicidad a la hora de ponerlos en práctica, porque no es posible tomar límites con métodos numéricos, no se conoce el valor real de x y no es posible lograr el 0. Buscando practicidad se deben modificar criterios. Al no conocer el valor real de x se emplea el que esté más cerca, o por lo menos el que se cree es el valor más cercano, o sea, el valor de la última iteración.

Como tampoco es posible lograr el 0, se elige un criterio de convergencia en base a una tolerancia predeterminada, empleando valores absolutos para tomar en cuenta el signo del error. Finalmente se obtiene:

Error absoluto: $E = |x_n - x_{n-1}| \leq$ Tolerancia

Error relativo: $\lim_{n\to\infty} E_{rn} = \lim_{n\to\infty} \frac{x - x_n}{x} \leq$ Tolerancia

Error porcentual: $E_{\%n} = 100|E_{rn}| = \leq$ Tolerancia

Como es imposible tomar el límite, el método numérico se aplica hasta que se cumpla alguno de los criterios anteriores, por lo tanto no se conoce de antemano el número de iteraciones a realizar.

Para fijar la tolerancia se debe tener en cuenta que:

Debe de ser un número pequeño, no negativo, distinto a 0. La tolerancia más pequeña posible se obtiene tomando en cuenta el número de cifras significativas, que maneje el instrumento de cálculo que se utilice. Si se usa una calculadora, no es posible lograr más de 8 cifras significativas.

No debe fijarse una tolerancia que sobrepase la precisión que pueda alcanzarse en un laboratorio, ya que el valor calculado no podría verificarse con la precisión obtenida.

Se fija la tolerancia dependiendo de para que se quieran los resultados. Si se requiere una estimación burda de la solución la tolerancia puede ser baja, una o dos cifras significativas. Pero si se desea precisión, la tolerancia debe de ser la mayor que se pueda alcanzar. Un valor típico de precisión es de cuatro cifras.

El criterio de convergencia debe ser fijado considerando la importancia del resultado buscado, teniendo en cuenta que puede ocurrir que algunos problemas no presentan convergencias.

El criterio de convergencia basado en el error, da una idea de los decimales que se han alcanzado. El número de ceros después del punto decimal, indica cuantos decimales correctos se tiene, lo que no define es cuantas cifras significativas se tienen.

El criterio de convergencia basado en el error relativo permite conocer el número de cifras significativas alcanzado. Este criterio es más útil que el anterior. Dado que el teorema es válido solo con el error relativo real. El problema que presenta es que no es aplicable si la solución del problema es 0.

El criterio del error porcentual es esencialmente equivalente al caso anterior.

Orden de convergencia

En la práctica interesa mucho que tan rápido converge un algoritmo para llegar a la solución buscada. Mientras menor sea el número de iteraciones requerido para alcanzar la precisión deseada, mayor será la velocidad de convergencia y viceversa. El orden de convergencia se define por la siguiente ecuación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E_{n+1}|}{|E_n|^{\alpha}} = \lambda$$

$$E_{n+1} = x - x_{n+1}, error\ en\ la\ iteración\ n + 1$$

$$E_n = x - x_n, error\ en\ la\ iteración\ n$$

$$\lambda = costante\ de\ error\ asintótico$$

$$\alpha = orden\ de\ convergencia$$

La A es una constante que depende del método numérico empleado y de la solución del problema, se supone que es distinta de 0. El exponente a es una constante dependiente normalmente solo del método numérico. Esta ecuación puede escribirse de otra manera:

$$|E_{n+1}| = \lambda |E_n|^{\alpha}$$

Esta ecuación dice que el error de una iteración es aproximadamente proporcional a una potencia del error de la iteración anterior. Suponiendo que exista convergencia, entonces los errores deben de tender a 0. En esta ecuación es más importante el exponente a. Dado que los errores tienden a 0, mientras mayor sea el valor de a, menor será el número de iteraciones que se requieren. A mayor orden de convergencia mayor velocidad de convergencia y viceversa.

El orden de convergencia normalmente es un valor constante. Un valor típico es 1, entonces el método numérico tiene convergencia lineal. Otro valor frecuente es 2, en este caso se dice que el método tiene convergencia cuadrática. Existen métodos de convergencia cubica, cuartica, etc., pero a medida que aumente el orden de convergencia también el método es más complicado. El orden de convergencia no necesariamente es un entero, aunque, normalmente lo es.

EJERCICIOS DE CONSOLIDACIÓN

Ejercicio 1.- Completa el siguiente cuadro con el valor de los errores absolutos, relativos y porcentuales.

Valor exacto	*Valor aproximado*	*Error absoluto*	*Error relativo*	*Error porcentual*
82	*82,87*			
221	*219,22*			
105	*106,37*			
53	*51,93*			

Ejercicio 2.- Sean los valores exactos: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 y 10 y los valores aproximados respectivos: 1,1; 2,1; 3,2; 3,9; 5,2; 6,3; 6,8; 8,1; 9,2; 10,3. Halla los errores absolutos, los errores relativos y los errores porcentuales de cada una de las cantidades presentadas respectos a sus cantidades aproximadas. Para la realización de este ejercicio es importante construir una tabla de valores.

Ejercicio 3.- Demuestra en las siguientes operaciones que el error absoluto de una suma es igual a la suma algebraica de los errores absolutos de los términos que participan en dicha operación.

$$2+5+7=14 \quad y \quad 2{,}1+5{,}2+7{,}2=14{,}5$$
$$3+6+2=11 \quad y \quad 3{,}2+6{,}3+2{,}1=11{,}6$$
$$9+10+4=23 \quad y \quad 9{,}2+10{,}3+4{,}1=23{,}6$$

Ejercicio 4.- En la diferencia de dos números demuestra que el error absoluto de la diferencia es menor que el mayor de los errores absolutos de sus términos.

$$9-2=7 \quad y \quad 9{,}2-2{,}1=7{,}1$$
$$5-1=4 \quad y \quad 5{,}2-1{,}1=4{,}1$$
$$10-3=7 \quad y \quad 10{,}3-3{,}2=7{,}1$$

Ejercicio 5.- En las siguientes sumas demuestra que el error relativo de la suma de varios números aproximados está situado entre el menor y el mayor de los errores relativos de los sumandos.

$$3 + 5 + 7 = 15 \quad y \quad 3{,}2 + 5{,}2 + 7{,}2 = 15{,}6$$
$$2 + 6 + 9 = 17 \quad y \quad 2{,}1 + 6{,}3 + 9{,}2 = 17{,}6$$
$$9 + 10 = 19 \quad y \quad 9{,}2 + 10{,}3 = 19{,}5$$

Ejercicio 6.- Demuestra que el error relativo del producto de dos números tiene el mismo valor que la suma de los errores relativos de los factores más el producto de esos mismos errores.

$$3\, X\, 7 = 21 \quad y \quad 3{,}2\, X\, 7{,}2 = 23{,}04$$
$$2\, X\, 10 = 20 \quad y \quad 2{,}1\, X\, 10{,}3 = 21{,}63$$
$$5\, X\, 9 = 45 \quad y \quad 5{,}2\, X\, 9{,}2 = 47{,}84$$

Ejercicio 7.- Demuestra que el error relativo del cociente de dos números dados es igual a la suma o la diferencia de los errores relativos de los datos, dividida por el menor más uno.

$$7 - 3 = 2{,}333 \quad y \quad 7{,}2 - 3{,}2 = 2{,}25$$
$$9 - 2 = 4{,}5 \quad y \quad 9{,}2 - 2{,}1 = 4{,}38$$
$$10 - 4 = 2{,}5 \quad y \quad 10{,}3 - 4{,}1 = 2{,}512$$

Ejercicio 8.- Subraya los dígitos significativos de cada expresión:

a) 21,33 b) 310,56 c) 0,0021 d) 0,30100

Ejercicio 9.- Redondea cada número presentado a continuación a tres dígitos significativos:

$a)$ 3,2495 = $b)$ 0,00414 = $c)$ 23,540 =
$d)$ 2,4315 = $e)$ 47,0217 = $f)$ 5,00791 =

Ejercicio 10.- Redondea a unidades las siguientes cifras

$a)$ 2,37 = $b)$ 37,88 = $c)$ 7,49 =
$d)$ 0,86 = $e)$ 21,37 = $f)$ 82,52 =

Ejercicio 11.- Redondea a dos cifras decimales las siguientes cantidades:

$a)$ 7,397 = $b)$ 53,7219 = $c)$ 0,5611 =
$d)$ 32,7777 = $e)$ 41,05321 = $f)$ 3,22631 =

CAPITULO II INTERPOLACIÓN Y AJUSTE DE CURVAS

Introduccion

La aproximación de funciones es una de las ideas más antiguas del análisis numérico, siendo ahora la más usada. Es fácil entender por qué razón se presenta esa situación. Los polinomios son fácilmente computables, sus derivadas e integrales son nuevamente polinomios, sus raíces pueden ser halladas con relativa facilidad.

La simplicidad de los polinomios permite que la aproximación polinomial sea obtenida de varias maneras, entre las cuales se pueden citar; interpolación, método de los mínimos cuadrados, mínimos y máximos, etc., por tanto es ventajoso sustituir una función complicada por un polinomio que la represente.

Definición 4. El ajuste de curvas consiste en encontrar una curva que contenga una serie de puntos y que posiblemente cumpla una serie de restricciones adicionales.

Teorema 5. Teorema de Weirstrass

Toda función continua pude ser arbitrariamente aproximada por un polinomio.

Interpolación polinomial

Por el término interpolación se entiende estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una medida ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al punto dado.

Los métodos de aproximación polinomial son usados como una aproximación para una función $f(x)$, principalmente, en las siguientes situaciones.

No se conoce la expresión analítica de $f(x)$, se conoce sus valores solamente en algunos puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Esta situación ocurre con frecuencia en la práctica cuando se trabaja con datos experimentales y es necesario manipular $f(x)$, como por ejemplo, calcular su valor en un punto determinado, o su integral en un intervalo dado. $f(x)$, es extremadamente complicada y de difícil manejo. Entonces, a veces, es interesante sacrificar la precisión en beneficio de la simplificación de los cálculos.

La clase de los polinomios algebraicos son una de la más usada clase de funciones reales de variable real de la forma: $P_n(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, donde n es un entero no negativo y $a_0 \ldots a_n$ son constantes reales. La razón de su importancia es que aproximan uniformemente funciones continuas; esto es, da una función definida y continua en un intervalo cerrado, existe un polinomio que está tan cerca de la función dada como se desee.

Teorema 6.

El problema de interpolación general tiene solución única si las *n* formas lineales son linealmente independientes.

Teorema 7. Teorema de aproximación de Weierstrass

Si f está definida y es continua en $[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio *P*, definido en $[a,b]$, con la propiedad de que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b]$$

El aspecto importante que presenta los polinomios en la aproximación de funciones es la facilidad para determinar la derivada y la integral indefinida de cualquier polinomio y el resultado es otra vez un polinomio. Esta es la razón por la frecuencia de uso de los polinomios para aproximar funciones que se suponen continuas.

Polinomios de interpolación

El problema general de interpolación por medio de polinomios consiste en, dado $n+1$ números o puntos distintos, sean éstos reales o complejos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $n+1$ puntos o números reales o complejos $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, números que en general, son $n+1$ valores de una función $y = f(x)$ en $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, determinándose un polinomio $P_n(x)$ de grado máximo n tal que: $P_0(x) = y_0$; $P_1(x_1) = y_1$; ...; $P_n(x_n) = y_n$

Los polinomios de interpolación existen y son únicos, en la hipótesis de que los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sean distintos.

Teorema 8.

Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (reales o complejos) y $n+1$ valores $y_0, y_1(y_2, \ldots, y_n$ existe uno y solo un polinomio de grado menor o igual a n tal que:

$$P_n(x_k) = y_k \ \ con\ k = 0,1,2,3, \ldots, n$$

Definición 5. *Se llama polinomio de interpolación de una función y = f(x) sobre un conjunto de puntos distintos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, al polinomio de grado máximo n que coincide con $f(x)$ en $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tal polinomio será designado* *por $P_n(f;\, x)$ y, siempre que no cause confusión simplemente por $P_n\,(x)$.*

Ejemplo 14.

Dados los pares de puntos $(-1, 15)$; $(0, 8)$; $(3, -1)$, determinar el polinomio de interpolación para la función definida por este conjunto de pares de puntos.

Solucion

De acuerdo a los datos del problema se tiene

$$\begin{array}{cc} x_0 = -1 & y_0 = 15 = f(x_0) \\ x_1 = 0 & y_1 = 8 = f(x_1) \\ x_2 = 3 & y_2 = -1 = f(x_2) \end{array}$$

Se tiene tres pares de puntos, por lo tanto $n = 2$, y se debe determinar $P_2(x)$

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \; tal\ que : P_2(x_k) = y_k, k = 0{,}1{,}2 \; esto\ es$$

$$\begin{array}{c} a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 {x_2}^2 = y_2 \end{array}$$

Susyituyendo x_k y y_k obtenemos

$$\begin{array}{c} a_0 + a_1 + a_2 = 15 \\ a_0 = 8 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 9 \end{array} \qquad a_0 = 8, \qquad a_1 = -6, \qquad a_2 = 2$$

Resolviendo la ecuación simultánea se tiene la solución y el polinomio de interpolación de f, es: $P_2(x) = 8 - 6x + x^2$, o lo que es lo mismo $P_2(x) = x^2 - 6x + 8$, Completando el ejemplo se presenta la gráfica de los puntos citados en un plano y la gráfica de la función en el mismo plano

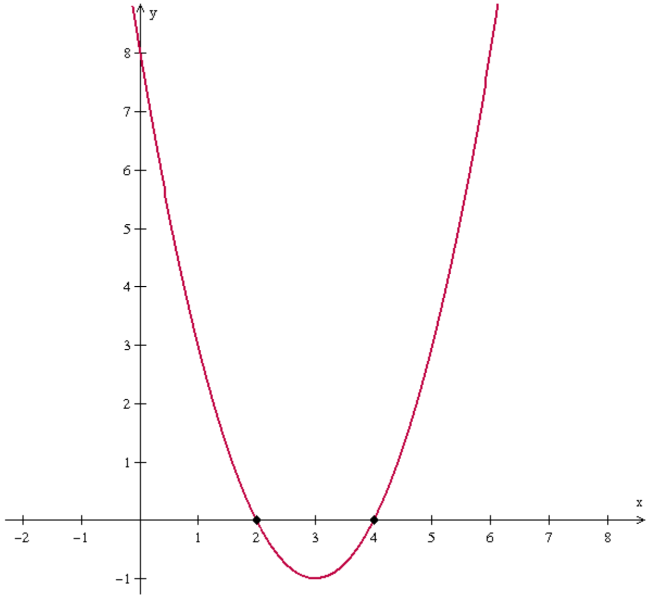

Figura 1. $P_2(x) = 8 - 6x + x^2$

Interpolación de Lagrange

Para la interpolación lineal se utiliza un segmento de recta que pasa por dos puntos conocidos, sean estos puntos $P(x_0, y_0)$ y $P(x_1, y_1)$ dichos puntos, luego la pendiente del segmento es:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0 \Rightarrow P(x)$$
$$= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0$$
$$P(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{y_0(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)x_0}{x_1 - x_0}$$
$$al\ final\ \ P(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{y_0x_1 - x_0y_1}{x_1 - x_0}$$

Es el polinomio de grado menor o igual a 1, que satisface que $P_0(x) = y_0;\ y\,P_1(x_1) = y_1$ Otra forma de encontrar este polinomio fue propuesta por Lagrange de esta forma:

$$y = P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$
$$y = P_1(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

Luego

$$y = P_1(x) = y_1\frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} + y_0\left(1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)$$

Hallando mcm al término entre paréntesis y multiplicando por (-1)

$$y = P_1(x) = y_1\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) + y_0\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)$$

Asi $L_{1,0} = \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)$ y $L_{1,1}\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)$, los cuales son lineales

$$y = P_1(x) = y_1 L_{1,0} + y_0 L_{1,1}$$

Como $L_{1,0}(x_0) = 0$, $L_{1,0}(x_1) = 0$, $L_{1,1}(x_0) = 0$, $L_{1,1}(x_1) = 1$ entonces $P_1(x_0) = y_1 L_{1,0}(x_0) + y_0 L_{1,1}(x_0) = y_0$ y $P_1(x_1) = y_1 L_{1,0}(x_1) + y_0 L_{1,1}(x_1) = y_1$ por tanto $P_1(x_1)$ pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1)

Definición 6. Los términos $L_{1,0} = \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)$ y $L_{1,1}\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)$, *se definen como coeficientes de LaGrange*

De la definición anterior se tiene:

$$P_1(x_0) = \sum_{k=0}^{1} y_k\, L_{1k}(x)$$

Cuando $y_k = f(x_k)$, el proceso de utilizar $P_1(x)$ para aproximar a $f(x)$ en $[x_0, x_1]$ se conoce como interpolación lineal, x_0, y_0 reciben el nombre de nodos. Si $x < x_0$ al proceso se le llama extrapolación.

Considerando la función $y = f(x) = sen\, x$ en [0.2; 1]. Usar los nodos $x_0 = 0.2$ y $x_1 = 1$ para construir un polinomio de interpolación lineal $P(x)$ y calcular $f(0.6)$.

La gráfica de la función se visualiza en la figura

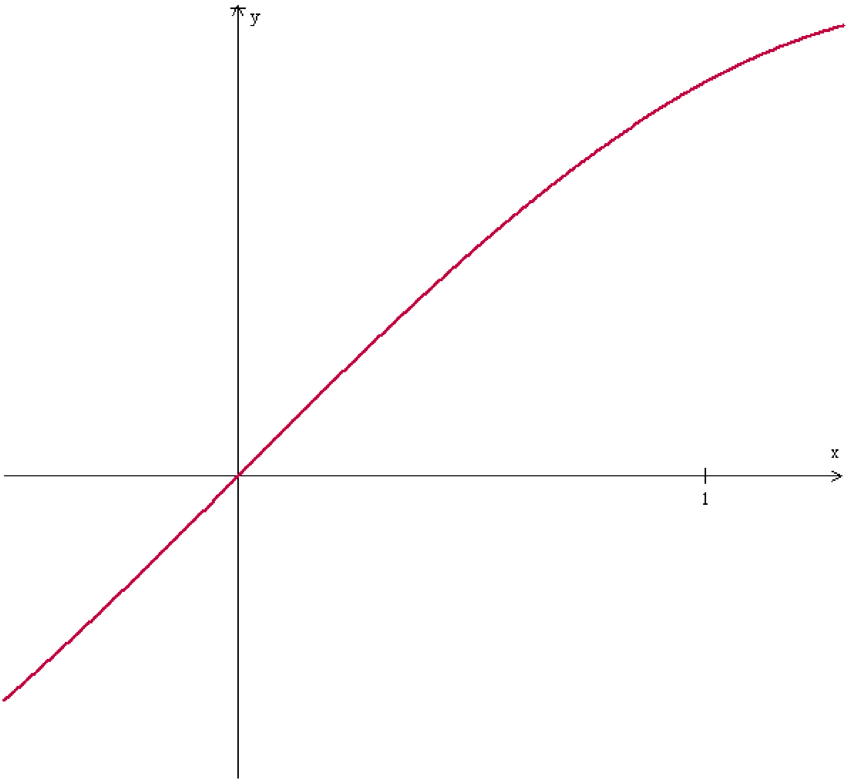

Figura 2. $f(x) = sen\,x$

$$x_0 = 0.2 \quad y_0 = sen\,0.2 = 0.19866933$$
$$x_1 = 1.0 \quad y_1 = sen\,1.0 = 0.84147098$$

Se aplica la fórmula para hallar $P(x)$

$$y = P_1(x) = y_1\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) + y_0\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)$$

$$y = P_1(x) = (0.84147098)\left(\frac{x - 0.2}{1.0 - 0.2}\right) + (0.19866933)\left(\frac{x - 1.0}{0.2 - 1.0}\right)$$

$$P_1(x) = 1.051838725(x - 0.2) - 0.248336662(x - 1.0)$$

Evaluando en $f(0.6)$ se tiene:

$$f(0.6) = 1.051838725(0.6 - 0.2) - 0.248336662(0.6 - 1.0)$$

$$f(0.6) = 1.051838725(0.4) - 0.248336662(-0.4)$$
$$= 0.42073549 + 0.099334664$$

$$f(0.6) = 0.520070154$$

Calculo de error

El valor verdadero de $f(0.6) = 0.564642473$

$$\mathrm{E_r}\frac{V_v - V_a}{V_V} = \frac{0.564642473 - 0.520070154}{0.564642473} = 0.07893, \mathrm{E_{\%}}$$
$$= |\mathrm{E_r} x100| = 7.89\%$$

De hecho, el error generado por este método es aún muy grande, se nota la diferencia al acercar los nodos al punto que se desea evaluar. Esto indica que este método no es el mejor a ser aplicado para construir un polinomio de interpolación.

En general si se tiene los $n + 1$ puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, y si $f(x_k) = P(x_k)$ para $k = 0,1,2,3,\ldots,n$ el polinomio que pasa por esos $n + 1$ puntos es:

$$P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{1} y_k\, L_{n,k}(x)$$

Donde

$$L_{\mathrm{n,k}} = \left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ (x-x_{\mathrm{k}})(x-x_{\mathrm{k+1}})(x-x_{\mathrm{n}})}{(x_{\mathrm{k}}-x_0)(x_{\mathrm{k}}-x_1)\ldots(x_{\mathrm{k}}-x_{\mathrm{k-1}})(x_{\mathrm{k}}-x_{\mathrm{k+1}})(x_{\mathrm{k}}-x_{\mathrm{n}})}\right)$$

Y la notacion mas compacta

$$L_{\mathrm{n,k}} = \frac{\prod_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{x_j})}{\prod_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x_k}-\mathrm{x_j})}$$

Ejemplo 15.

Sea $y = f(x) = senx$ en el intervalo [0.2,1]. Usando los nodos x_0 = 0.2; x_1 = 0.5; x_2 = 1 construir el polinomio interpolador $P_2(x)$ y calcular f(6).

Solución

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0.2 & y_0 = sen\,0.2 = 0.198669 \\ x_1 = 0.5 & y_0 = sen\,0.5 = 0.479426 \\ x_2 = 1.0 & y_0 = sen\,1.0 = 0.841471 \end{array}$$

Se aplica la fórmula para hallar $P_2(x)$, teniendo en cuenta que se tienen tres nodos

$$P_2(x) = y_0\left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-\ x_1)(x_0-\ x_2)}\right) + y_1\left(\frac{(x-x_0)(x-\ x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right) + y_2\left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-\ x_0)(x_2-\ x_1)}\right)$$

$$P_2(x) = 0.198669\left(\frac{(x-0.5)(x-1)}{(0.2-0.5\ )(05-\ 1)}\right) + 0.479426\left(\frac{(x-0.2)(x-\ 1)}{(0.5-0.2)(0.5-1)}\right) + 0.841471\left(\frac{(x-0.2)(x-0.5)}{(1-\ 0.2)(1-\ 0.5)}\right)$$

$$P_2(x) = 0.82779\big((x-0.5)(x-1)\big) - 3.19617\big((x-0.2)(x-\ 1)\big) + 2.10368\big((x-0.2)(x-0.5)\big)$$

$$P_2(x) = 0.82779\ (x^2-1.5x+0.5) - 3.19617(x^2-1.2x+0.2) + 2.10368(x^2-0.7x+0.1)$$

$$P_2(x) = 0.82779\,x^2 - 1.241685x + 0.413895 - 3.19617x^2 + 3.835404x - 0.639234 + 2.10368x^2 - 1.472576x + 0.210368$$

$$P_2(x) = -0.2647\,x^2 + 1.21143x - 0.014971$$

$$P_2(0.6) = -0.2647\,(0.6)^2 + 1.21143(0.6) - 0.014971$$

$$P_2(0.6) = -0.095292 + 0.6726858 - 0.014971 = 0.5624228$$

Calculo de Error

El valor verdadero de $sen(x) en\ f(0.6) = 0.564642473$

$$E_r\frac{V_v-V_a}{V_V} = \frac{0.56464247-0.56423}{0.56464247} = 3.93x10^{-3}, E_{\%} = |E_r x100| = 0.39\%$$

Observación: en la figura se tienen las dos funciones superpuestas en el intervalo estudiado, la función sen(x) y el polinomio de interpolación $P_2(x)$

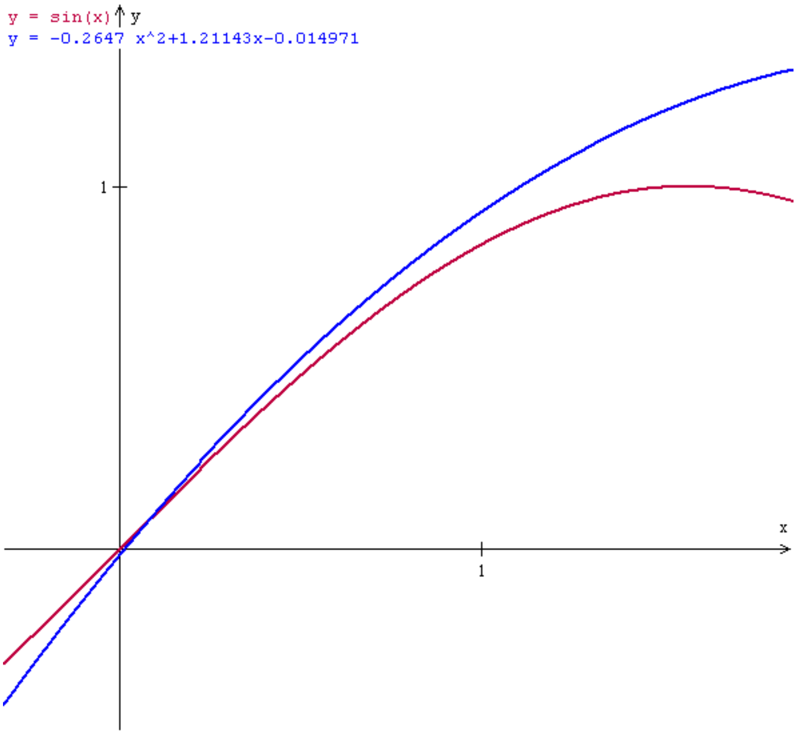

Figura 3. $f(x) = sen\, x \quad y\ P_2(x)$

Error en la interpolación

El polinomio de interpolación $P_n(x)$ para una función $y = f(x)$ sobre un conjunto de puntos distintos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ cumple la propiedad $P_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0,1,2, \ldots, n$ En los puntos $\bar{x} \neq x_k$ no siempre es verdadero que $P_n(x) = f(x)$. Para evaluar $f(x)$ en los puntos $\bar{x} \neq x_k, k = 0,1,2, \ldots, n$ se considera $P_n(x)$ como una aproximación para la función $y = f(x)$ en un cierto intervalo que contangan los puntos $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ y se calcula$f(x)$ a través de$P_n(x)$.

Teorema 9. Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ es diferenciable en cada punto de (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $x = \varepsilon, a < \varepsilon < b$, tal que $f'(\varepsilon) = 0$.

Teorema 10. Teorema generalizado de Rolle

Sea $n > 2$, suponiendo que $f(x)$ sea continua en $[a, b]$ y que $f^{n-1}(x)$ exista en cada punto de (a, b). suponiendo que $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = 0\ para\ a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$. existe entonces un punto $\varepsilon, x_1 < \varepsilon < x_n, tal\ que\ f^{n-1}(\varepsilon) = 0$

Teorema 11. Teorema del término de error

Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ es diferenciable y suponiendo que $f^{n-1}(x)$ exista en cada punto de $(a, b). Si\ \ a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$. Entonces

$$R_n(f; x) = f(x) - P_n(f; x) = \left(\frac{(x - x_0) \ldots (x - x_n)}{(n-1)!}\right) f^{n+1}(\varepsilon)$$

Donde min $(x_0, x_1, x_2 \ldots x_n)$, el punto ε depende de x Este teorema es más teórico que práctico. En la práctica, para estimar el error cometido al aproximar el valor de una función en un punto por su polinomio de interpolación, se utiliza el siguiente corolario:

$$R_n(f;x) = f(x) - P_n(f;x)$$

Si $f(x)$ y sus derivadas hasta orden $n+1$ son continuas en $[a,b]$ entonces:

$$R_n(f;x) \leq \left(\frac{|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}{(n-1)!}\right) \max_{a\leq t\leq b} f^{n+1}(\varepsilon)$$

Teorema 12. Puntos igualmente espaciados

Cuando los puntos x_i, son igualmente espaciados de $h \neq 0$, esto es:

$x_{i+1} - x_i = h,\ i = 0,1,\ldots,n-1$, donde *h* es un número fijo. Se determina una forma del polinomio de interpolación y de error, en términos de una variable *u*, definida así:

$$u = \frac{x - x_i}{h}$$

En función de la variable *u*, se tienen los siguientes teoremas.

Teorema 13.

Para r enteros, no negativos, $x - x_r = (u - r)h$.

Teorema 14.

Para r y s enteros, no negativos, $x_r - x_s = (r - s)h$. Usando los dos teoremas anteriores se obtiene

$$P_n(x_0 + uh)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{u(u-1)\ldots(u-(k-1))(u-(k+1))\ldots(u-n)}{k(k-1)\ldots(k-(k-1))(k-(k+1))\ldots(k-n)}$$

Que es la fórmula de Lagrange de polinomio de interpolación igualmente espaciados de $h \neq 0$. Esta forma de polinomio interpolación es particularmente útil en la determinación de integración numérica de funciones.

Se sustituye $x - x_r$ por $(u - r)h$ en

$$R_n(f;x) = f(x) - P_n(f;x)\left(\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{(n-1)!}\right) f^{n+1}(\varepsilon)$$

$$R_n(x) = R_n(x_0 + uh) = u(u-1)\ldots(u-n)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\varepsilon)$$

Donde $\min(x, x_0, x_1, \ldots x_n) \leq \varepsilon \leq \max(x, x_0, x_1, \ldots x_n)$

El polinomio de interpolacion para $f(x)$ sonbre $n + 1$ puntos $x, x_0, x_1, \ldots x_n$ se escribe en terminos de $u = \frac{x-x_0}{h}$ como

$$P_n(x_0 + uh) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(u) f_k$$

$$\lambda_k(u) = \frac{u(u-1)\dots(u-(k-1))(u-(k+1))\dots(u-n)}{k(k-1)\dots(k-(k-1))(k-(k+1))\dots(k-n)}$$

Ejemplo 16.

Dada la siguiente tabla:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
e^{3x}	1	1.3499	1.8221	2.4596	3.3201	4.4817

Calcular $f(x) = x\,e^{3x}$ en el punto $x = 0.25$ usando polinomio de interpolación sobre tres puntos.

Hallar un límite superior para el error de truncamiento.

Solución

Inicialmente se escogen tres puntos apropiados en la tabla dada y a continuación se construye la tabla de $f(x) = x\,e^{3x}$ en el punto $x_1 = 0.2$ $x_2 = 0.3$, $x_3 = 0.4$

x	0.2	0.3	0.4
e^{3x}	0.3644	0.7379	1.3280

Usando $\lambda_k(u) = \frac{u(u-1)\dots(u-(k-1))(u-(k+1))\dots(u-n)}{k(k-1)\dots(k-(k-1))(k-(k+1))\dots(k-n)}$

$$\lambda_0(u) = \frac{u(u-1)(u-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{u^2 - 3u + 2}{2}$$

$$\lambda_1(u) = \frac{u(u-2)}{1(1-2)} = \frac{u^2 - 2u}{-1}$$

$$\lambda_2(u) = \frac{u(u-1)}{2(2-1)} = \frac{u^2 - u}{2}$$

Y usando $\quad P_n(x_0 + uh) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(u) f_k$

$$P_2(x_0 + uh) = \sum_{k=0}^{2} \lambda_k(u) f_k$$

$$P_2(x_0 + uh) = (0.3644)\frac{u^2 - 3u + 2}{2} + (0.7379)\frac{u^2 - 2u}{-1} + (1.32800)\frac{u^2 - u}{2}$$

Agrupando terminos y resolviendo

$$P_2(x_0 + uh) = 0.1083u^2 + 0.2652u + 0.3644$$

Se desea clacular $\quad f(0.25)$

$$u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.25 - 0.2}{-1} = 0.5$$

Usando regla de ruffini

	0.1083	−0.2652	0.3644
0.5		0.0542	0.1597
	0.1083	0.3194	0.5241

Entonces $P_2(0.5) = 0.5241 \neq f(0.25)$

De

$$R_n(x) = R_n(x_0 + uh) = u(u-1)\ldots(u-n)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\varepsilon)$$

Se tiene

$$R_2(u) = u(u-1)(u-2)\frac{h^3}{3!}f'''(\varepsilon)$$

De

$$R_n(f;x) \leq \left(\frac{|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}{(n-1)!}\right)\max_{a\leq t\leq b} f^{n+1}(\varepsilon)$$

$$R_2(u) = u(u-1)(u-2)\frac{h^3}{3!}\max_{a\leq t\leq b} f'''(\varepsilon)$$

Donde $u = 0.5$ $h = 0.1 \rightarrow h^3 = 0.001$ y apartir de $f'''(t) = 27e^{3t}(1+t) \rightarrow \max_{a\leq t\leq b}|f'''(t)| = 125.4988$

Por tanto

$$R_2(u) = |0.5||0.5-1||0.5-2|\frac{0.001}{6}x(5.066 = 0.0078 \cong 10^{-3})$$

Observaciones

Si se compara el valor obtenido para $f(0.25)$ con el valor exacto se verificará que el resultado está con dos cifras decimales correctas.

El polinomio de interpolación obtenido en este ejemplo está en función de la variable *u.* Por lo tanto no es posible verificar si el valor del polinomio en los puntos tabulados coincide con el valor de la función en esos puntos. Como la función es creciente en el intervalo [0.2; 0.4], el valor para $f(0.25)$ debe estar entre [0.3644; 0.7379].

Cuando se conoce la expresión analítica de la función, el termino del resto genera una estimación sobre el numero de cifras decimales correctas que se puede obtener en la aproximación. La aplicación de la formula de termino del resto es útil cuando se desea el resultado con una precisión prefijada.

Diferencias Divididas

Hay dos desventajas al usar el polinomio de Lagrange para interpolación.

Implican más operaciones aritméticas que el método de diferencias divididas (método a ser analizada a continuación).

Si se desea sumar o restar un punto del conjunto usado para obtener el polinomio, esencialmente debe iniciarse de nuevo el proceso.

El método de diferencias divididas es económico en cuanto a los cálculos aritméticos realizados en el proceso.

Es importante notar que, tanto por el método de Lagrange como por el método de diferencias divididas no se consiguen resultados diferentes, solamente en la economía de los procesos de cálculo.

Definición 7. *Sea* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, n+1$. *Puntos distintos en un intervalo* $[a, b]$ *y sean* $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n, n+1$, *valores de una función* $y = f(x)$ *sonbre* $x = x_k, k = 0.1, \ldots, n$ *se define*

Definición 8. $f[x_k] = f(x_k), k = 0,1,2, \ldots, n$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1 x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Definición 9. *Donde* $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *es la diferencia dividida de orden n de la función* $f(x)$ *sobre los puntos* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, n+1$

Usando esta definicion se tiene

$$f\left[x_{0,}x_1\right] = \frac{f[x_1] - f\left[x_{0,}\right]}{x_1 - x_0}$$

$$f\left[x_{0,}x_1, x_2\right] = \frac{f[x_1, x_2] - f\left[x_{0,}x_1\right]}{x_2 - x_0}$$

$$f\left[x_{0,}x_1, x_2, x_3\right] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f\left[x_{0,}x_1, x_2\right]}{x_3 - x_0}$$

Al segundo miembro de cada ecuación precedente se debe aplicar sucesivamente la definición de diferencia dividida hasta que los cálculos involucren solamente el valor de la función en los puntos, o sea:

$$f\left[x_{0,}x_1, x_2\right] = \frac{\dfrac{f[x_2] - f\left[x_{1,}\right]}{x_2 - x_1} - \dfrac{f[x_1] - f\left[x_{0,}\right]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Existe una forma más simple y organizada para calcular las diferencias divididas de una función, es construyendo una tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f\left[x_{0,}x_1\right] = \frac{f[x_1] - f\left[x_{0,}\right]}{x_1 - x_0}$		
x_2	$f[x_2]$	$f\left[x_{1,}x_2\right] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f\left[x_{0,}x_1, x_2\right] = \frac{f[x_1, x_2] - f\left[x_{0,}x_1\right]}{x_2 - x_0}$	

x_3	$f[x_3]$	$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1 x_2]}{x_3-x_1}$	$\cdots$
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3,x_4] = \dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$	$f[x_2,x_3,x_4,] = \dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

La primera columna está constituida por los puntos $x_k,\ k = 0,1,2,\ldots,n$;

La segunda columna contiene los valores de $f(x)$ en los puntos $x_k,\ k = 0,1,2,\ldots,n$; La siguientes columnas $3,4,5,\ldots$, están las diferencias divididas de orden $1,2,3,\ldots$ cada una de estas diferencias es una función cuyo numerados es siempre la diferencia entre dos diferencias consecutivas y de orden inmediatamente inferior y cuyo denominador es la diferencia entre los dos extremos de los puntos considerados.

Ejemplo 17.

Construir la tabla de diferencia dividida de la siguiente función presentada en la tabla.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	29	30	31	62

Solución

Usando la tabla de diferencia divida se tiene:

x_i	$f[x_i]$	$[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, \dots, x_l]$	$f[x_i, \dots, x_m]$
-2	-2				
-1	29	$\frac{20-(-2)}{-1-(-2)} = 31$			
0	30	$\frac{30-29}{0-(-1)} = 1$	$\frac{1-31}{0-(-2)} = -15$		
1	31	$\frac{31-30}{1-0} = 1$	$\frac{1-1}{1-(-1)} = 0$	$\frac{0-(-15)}{1-(-2)} = 5$	
2	62	$\frac{62-31}{2-1} = 31$	$\frac{31-1}{2-0} = 15$	$\frac{15-0}{2-(-1)} = 5$	$\frac{5-5}{2-(-2)} = 0$

Ejemplo 18.

Para la siguiente tabla de datos construya la tabla de diferencias divididas:

x	*-0.3*	*-0.2*	*-0.1*	*0.0*	*0.1*	*0.2*	*0.3*
F(x)	*1.6081*	*1.4016*	*1.2001*	*1.0000*	*0.8001*	*0.6016*	*0.4081*

Solución.

x_i	*$F[x_i]$*	*Orden 1*	*Orden 2*	*Orden 3*	*Orden 4*	*Orden 5*	*Orden 6*
-0.3	*1.6081*						
-0.2	*1.4016*	*-2.065*					
-0.1	*1.2001*	*-2.015*	*0.25*				
0.0	*1.0000*	*-2.001*	*0.07*	*-0.6*			
0.1	*0.8001*	*-1.999*	*0.01*	*-0.2*	*1.0*		
0.2	*0.6016*	*-1.985*	*0.07*	*0.2*	*1.0*	*0*	
0.3	*0.4081*	*-1.935*	*0.25*	*0.6*	*1.0*	*0*	*0*

Note que las diferencias divididas de orden 4 tienen el mismo valor, y las diferencias de orden superior a 4 son nulas, lo cual concuerda con que la derivada de orden 4 de un polinomio de cuarto grado es constante y su quinta derivada es cero.

Si al construir una tabla de diferencias divididas en alguna columna k todos los elementos tienen el mismo valor y en las siguientes columnas los elementos son ceros, entonces la tabla corresponde a un polinomio de grado k.

Fórmula de Newton

Para obtener la formula de Newton de polinomio de interpolaciones necesario definir algunas funciones. En principio la función $f(x)$ debe ser continua y que tenga derivada continua en el intervalo $[a,b]$, además de eso, que los puntos $x_0, x_i, ..., x_n$ sean distintos en $[a,b]$. Las funciones se definen de la siguiente manera.

$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$, , definida [a,b] en para $x \neq 0$

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ definida [a,b] en para $x \neq 0$ y $x \neq x_1$

$$(n+1)f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] = f[x_0, x_1, ..., x\_n] = \frac{f[x_1\ x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ...}{x_n - x_0}$$

Definida para [a,b], $x \neq x_k$, $k = 0,1,2,3 \ldots\ldots n$

En las funciones definidas precedentemente, se producen aumentos sucesivos, en la diferencia divida o el proximo punto de la tabla. En todos los casos se aplican el corolario de diferencias divididas.Las diferencias divididas de orden k de una función f(x) satisface

$$f[x_{0,}x_1, x_2 \dots . x_k] = \frac{f[x_0]}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \dots . (x_k - x_0)} + \frac{f[x_1]}{(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) \dots . (x_k - x_1)} + \frac{f[x_k]}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots . (x_{k-1} - x_k)}$$

Esto afirma que se puede usar cualquier par de puntos para construir la diferenciadividida de una funcion, y no necesariamente el primero y el último. A partir de este punto corresponde buscar una formula de recurrencia para f(x) De la formula anterior se obtiene:

$$f(x) = f[x_1] + (\mathrm{x} - x_0)f[x, x_0]$$

De las formulas anteriores,se tiene:

$$f[x_{0,}x_1, x](x_1 - x_0) = f[x_0, x_1]f[x_0, x]$$

$$f[x_{0,}x_1, x](x_1 - x_0) = \frac{f[x] - f[x_0]}{(x_1 - x_0)} - f[x_0, x_1]$$

$$f(x) = f[x_0] + (\mathrm{x} - x_0)f[x_0, x_1] + (\mathrm{x} - x_0)(\mathrm{x} - x_1)f[x_{0,}x_1, x]$$

De forma parecida, de (n+1) se obtiene:

$$f(x) = f[x_0] + (\mathrm{x} - x_0)f[x_0, x_1] + (\mathrm{x} - x_0)(\mathrm{x} - x_1)f[x_{0,}x_1, x_2]$$

$$+(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_{0,}x_1, x_2, x_3]$$

$$+(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_{0,}x_1, x_2, . . , x_n]_1$$

$$+(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_{0,}x_1, x_2, . . , x_n]_2$$

De esta manera se tiene una formula de recurrencia para f(x).

$$P_n(x) = f[x_0] + (\mathrm{x} - x_0)f[x_0, x_1] + . . + (\mathrm{x} - x_0) \dots (\mathrm{x} - x_{\mathrm{n}-1})f[x_{0,}x_1, \dots, x_n] = \{\dots\}_1$$

Es el polinomio de interpolacion de la funcion $y = f(x)$ sobre los puntos $x_{0,}x_1, \dots, x_n$ esto es $P_n(x_k) = f(x_k), k = 0{,}1, \dots, n$

Luego:

$$P_n(x) = f[x_0] + (\mathrm{x} - x_0)f[x_0, x_1] + (\mathrm{x} - x_0)(\mathrm{x} - x_1)f[x_{0,}x_1, x_2] + \dots$$

$$+(\mathrm{x} - x_0)(\mathrm{x} - x_1) \dots (\mathrm{x} - x_{\mathrm{n}-1})f[x_{0,}x_1, \dots, x_n] = \{\dots\}_1$$

Esta es la formula de Newton de polinomios de interpolacion. La expresion:

$$\mathrm{R_n} = (\mathrm{x} - x_0)(\mathrm{x} - x_1) \ldots (\mathrm{x} - x_\mathrm{n}) f[x_{0,}x_1, \ldots, x_n, x] = \{\ldots\}_2$$

Corresponde a la formula del termino del resto o error de truncamiento.

Este error de truncamiento es la misma de la formula de Lagrange.

Estimación Del Error Usando Polinomios De Newton.

Si se conoce la ley de asignación que define a f , el error se puede estimar usando la fórmula $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$. Si no se conoce f, entonces el error se estima así: el polinomio de Newton de grado $\leq n$ que interpola los puntos.

x_i	x_0	...	x_n
$f(x_i)$	f_0	...	f_n

viene dado por la expresión $P_n(x) = f[x_0] + (\mathrm{x} - x_0) f[x_0, x_1] + \ldots + (\mathrm{x} - x_0) \ldots (\mathrm{x} - x_{\mathrm{n}-1}) f[x_{0,}x_1, \ldots, x_n] = \{\ldots\}_1$, y supongamos que se le añade el punto (t, f_1) a la tabla, entonces el error $R_n(x)$ es igual al término que se le añadiría a $P_n(x)$ si fuéramos a construir un polinomio de grado $(n+1)$, es decir: $R_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, t](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$

Polinomios interpolantes de newton con nodos igualmente espaciados.

Sí los nodos $x_i, i = 0,1,2,3,4,5 \dots n$ se ordenan en forma creciente y están igualmente espaciados, entonces la fórmula $P_n(x) = f[x_0] + (\mathrm{x} - x_0)f[x_0, x_1] + .. + (\mathrm{x} - x_0)\dots(\mathrm{x} - x_{\mathrm{n}-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ se puede expresar de otra forma: sea h el tamaño de paso entonces: los nodos se pueden expresar así $x_i = x_0 + hi$, y cualquier punto no tabulado x es igual a $x = x_0 + hs, s > 0$; por lo que: $x - x_i = h(s - i)$; $\mathrm{i} = 0,1,2, \dots .\mathrm{n} - 1$ lo cual se sustituye en la formula de $P_n(x)$ y se obtiene:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]hs + f[x_0, x_1, x_2]h^2 s(s-1) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n]h^n s(s-1)\dots(s-n+1)$$

$$P_n(s) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_n]h^k s(s-1)\dots(s-k+1)$$

La cual se conoce como la fórmula de diferencias divididas progresivas de Newton (también se conoce como fórmula hacia adelante) y el error viene dado por:

$$R_n(s) = f[x_{0,}x_1, \dots, x_n]h^{n+1}s(s-1)\dots(s-n)$$

Nota:

a) El valor de $f[x_{0,}x_1, \dots, x_k]$ se calcula usando la tabla de diferencia dividida.

b) Como $x = x_0 + hs, s > 0$, entonces $s = \frac{x-x_0}{h}$, donde x punto a evaluar, x_0 el primer nodo.

c) La fórmula $P_n(s)$ se puede expresar de otra forma usando el siguiente proceso: recuerde que: $\binom{s}{k} = \frac{s!}{k!(s-k)!} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k)!}{k!(s-k)!}$, lo cual equivale a $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k)!}{k!(s-k)!}$, esto se sustituye en $P_n(s)$ y se obtiene :

$$P_n(s) = \sum_{k=0}^{n} f[x_{0,}x_1, \dots, x_n]k!\binom{s}{k}h^k \quad ,$$

$$R_n(s) = f[x_{0,}x_1, \dots, x_n]n!\binom{s}{n}h^{n+1}$$

Formula de Newton-Gregory

Para puntos igualmente espaciado se puede usar una variante de la formula de Newton, conocida como formula de Newton – Gregory.

La fórmula $P_n(s)$ también se puede expresar usando la notación de las diferencias progresivas Δ:

$$f[x_{0,}x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_{0,}]}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$f[x_{0,}x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_{0,}x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{2h^2} = \frac{\Delta(\Delta f(x_0))}{2h^2}$$

$$f[x_{0,}x_1, x_2] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

En general: $f[x_{0,}x_1, \dots , x_k] = \frac{1}{k!}\frac{1}{k}\Delta^k f(x_0)$, lo cual se sustituye en $P_n(s) = \sum_{k=0}^{n} f[x_{0,}x_1, \dots , x_n]k!\binom{s}{k} h^k$ obteniéndose lo que se conoce con el nombre de Diferencias Progresivas de Newton :

$$P_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$$

Si los nodos se ordena así $x_n, x_{n-1}, \dots , x_0$ (en forma decreciente), el polinomio de Newton es igual a:

$$P_n(x) = f[x_{\mathrm{n}}] + (\mathrm{x} - x_{\mathrm{n}})f[x_n, x_{\mathrm{n}-1}]$$
$$+ (\mathrm{x} - x_{\mathrm{n}})(\mathrm{x} - x_{\mathrm{n}-1})f[x_{\mathrm{n},}x_{\mathrm{n}-1}, x_{n-2}] + \dots$$

$$+f[x_{\mathrm{n},} \dots , x_0](\mathrm{x} - x_{\mathrm{n}})(\mathrm{x} - x_{\mathrm{n}-1}) \dots (\mathrm{x} - x_1)$$

Sí los nodos son equidistantes con el tamaño de paso *h* entonces :

$x_1 = x_0 + hi$, $x_n = x_0 + nh$, $x_n = x_n + hs$, $x - x_i = h(s + n - 1), i = 0,1,2, \ldots, n$

los cuales se sustituyen en polinomio de Newton en forma decreciente obteniéndose:

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}]sh + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]h^2 s(s+1) + \ldots$$

$$+ f[x_n, \ldots, x_0]h^n s(s+1) \ldots (s+n-1)$$

$$R_n(s) = f[\![x_{n+1}, \ldots . x_0]\!]h^{n+1} s\,(s+1) \ldots .(s+n)$$ (Error asociado)

que se conoce como la fórmula de diferencias divididas regresivas (o hacia atrás) de Newton.

Notas:

a) las diferencias que aparecen en la fórmula de $P_n(x)$ previa, quedan en la diagonal inferior de la tabla de diferencias divididas. b) Si ya has construido la tabla de diferencia dividida hacia delante no es necesario construir la tabla de diferencia dividida hacia atrás. Se trabaja con la primera y se toman los elementos de la diagonal inferior (trazadas de abajo hacia arriba).

EJERCICIOS DE CONSOLIDACIÓN

Ejercicio 12.- Halla el polinomio de interpolacion de los siguientes puntos: $(1,2);(0,4);(2,6)$. Evaluarlo en $f(1.5)$

Ejercicio 13.- Halla el polinomio de interpolacion de los siguientes puntos: $(-1,3);(-2,1);(0,-1);(1,0)$. Evaluarlo en $f(1.5)$.

Ejercicio 14.- Dados los pares de puntos $(1,3);(2,3);(3,6);(4,3)$, determinar el polinomio de interpolación para la función definida por este conjunto de pares de puntos.

Ejercicio 15.- Dados los pares de puntos $(2,2);(3,5);(5,8);(7,4)$ determinar el polinomio de interpolación para la función definida por este conjunto de pares de puntos.

Ejercicio 16.- Sea la siguiente tabla:

x	0	1	3	5
$f(x)$	-1	3	9	2

Determinar el polinomio de interpolacion con la formula de Lagrange, sobre todos los puntos y calcular ; $f(4)$

CAPITULO III

SISTEMAS NO LINEALES

Introduccion

Estudiamos en este capítulo uno de los problemas más básicos de la aproximación numérica y con mayor historia: el cálculo de raíces. Es decir, la determinación de una *raíz*, o solución, de una ecuación de la forma $f(x) = 0$, donde f, por lo general, es una función real no lineal de variables reales.

Las raíces de esta ecuación también se llaman *ceros* de la función *f*. Un ejemplo que muestra la necesidad de tener técnicas de aproximación a alguna solución del problema anterior es el caso simple de encontrar soluciones de un polinomio. Se conocen fórmulas para polinomios de grados 2, 3 y 4, siendo de complejidad creciente, pero con la posibilidad de determinar sus ceros exactamente.

A principios de siglo XIX Galois probó que no existen fórmulas explícitas para determinar los ceros de polinomios de grado mayor o igual que 5. La situación es aún más difícil cuando f no es un polinomio. Esta limitación obliga a buscar métodos para encontrar los ceros de forma aproximada. Los métodos que se discuten en esta lección son iterativos y de dos tipos: uno en el que se puede asegurar la convergencia y el otro en el que la convergencia depende de una o dos aproximaciones iniciales.

Métodos conceptualmete sencillos son los métodos de intervalo, que aprovechan el cambio de signo de la función en el entorno de una raíz. Así, partiendo de dos valores proporcionados inicialmente, dichos métodos tratan de reducir el tamaño del intervalo que encierra al cero buscado, hasta converger a éste con la suficiente precisión.

Un ejemplo de este tipo de métodos es el de bisección, que además de ser un método simple e intuitivo, se puede utilizar para obtener una adecuada estimación inicial del cero de la función que después puede ser refinado por métodos más poderosos. El segundo tipo de métodos se basa en aproximar la función, cuyos ceros se buscan, por una recta. Los métodos que describiremos parten de una aproximación (Método de Newton, que aproxima la función por una recta tangente) o dos aproximaciones (Método de la Secante, que aproxima la función por una recta secante) y determinan el cero de la función con una precisión deseada. Estos métodos no garantizan la convergencia, pero, cuando convergen, lo hacen generalmente más rápidamente que los métodos de intervalo

Uno de los problemas que frecuentemente se presenta y requiere de solucion en algun tipo de trabajo cientifico, es el de calcular las raices de una determinada ecuacion de la forma $f(x) = 0$ Donde $f(x)$puede ser un polinomio en x una funcion trascendente.

Es posible hallar la raiz exacta de $f(x) = 0$, cuando los polinomios son factorables, sin embargo, no siempre sucede asi, pues en la mayoria de los casos, las raices de las ecuaciones buscadas pertenecen al conjunto de los numeros racionales o al conjunto de los números complejos, pudiendo ocurrir que en una misma ecuacion se den resultados con números reales y complejos.

Por medio de metodos numericos es posible obtener una solucion aproximada al valor exacto, tan proxima como se desee, dependiente de la precision deseada prefijada.

La mayoria de los procedimientos numericos generan una secuencia de aproximaciones, algunas con mayor precision que otras, algunas aproximandose con mayor rapidez a lasolucion buscada, de tal forma que la repeticion de procedimientos produce una aproximación al valor verdadero con una precision definida por una tolerancia prefijada.

La busqueda de raices por medio del analisis numerico es similar al de limite del análisis matematico, pues normalmente el resultado obtenido de una operacion por medio de metodos numericos se acerca tanto como se desee al valor verdadero, sin llegar casi nunca al valor exacto.

La caracteristica principal de los metodos numericos es que casi nunca arrojan resultados exactos, por lo tanto, en la mayoria de los casos, si no en todos, se obtienen resultados aproximados, que siempre dependeran de la precision que se desee.

Teorema 15. Teorema de Fermat

Si una función $f(x) = 0$ alcanza un máximo o mínimo local en c, y si la derivada $f'(x) = 0$ existe en el punto c, entonces $f'(c) = 0$

Suele utilizarse como método para hallar máximos y mínimos locales de funciones diferenciables en intervalos abiertos, ya que todos ellos son puntos estacionarios de la función (puntos donde la función derivada vale cero, $f'(x) = 0$). El teorema de Fermat sólo da una condición necesaria para los máximos y mínimos locales, sin embargo, no se refiere a otra clase de puntos estacionarios como son en ciertos casos los puntos de inflexión (que no son ni máximos ni mínimos). La derivada segunda de la función $f''(x)$; si es que existe; puede indicar si el punto estacionario en cuestión es un máximo, un mínimo, o un punto de inflexión. El teorema de Fermat es un teorema de análisis real llamado así en honor a Pierre de Fermat.

Teorema 16.

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$; entonces existe un punto $x_0 \in [a,b]$ para el cual $f(x_0) \geq f(x) \forall\, x \in [a,b]$

Teorema 17.

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$; entonces existe un punto $x'_0 \in [a,b]$ para el cual $f'(x_0) \leq f(x) \forall\, x \in [a,b]$

Teorema 18. Teorema de Rolle

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$; diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

Teorema 19. Teorema de Rolle

Entre dos raices consecutivas de una ecuacion algebraica $f(x) = 0$, existe un numnero impar de ceros de la derivada f', contando cada uno de ellos tantas veces como indique su orden de multiplicidad. Entre dos raices consecutivas de la derivada no pueden existir dos raices distintas de $f(x) = 0$, porque si existieran, f' tendria una raiz intermedia.

Teorema 20. Teorema del Valor Medio

Si f es continua en un intervalo cerrado y $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) existe un numero $c \in (a, b)$, tal que $f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$

Teorema 21. Teorema del valor Intermedio

Si f es continua en un intervalo cerrado y $[a, b]$ $f(a) \neq f(b)$ y k un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$entonces existe un numero $c \in (a, b)$, tal que $f(c)$ = k

Resolucion de ecuaciones no lineales

Para resolver ecuaciones no lineales se deben tener en cuenta varias situaciones, sin embargo la mas importante es encontrar el intervalo o un punto en $\bar{x}$ para comenzar las iteraciones en busca de un cero de la funcion, procurando que este valor se encuentre lo bastante proximo de un cero, asi se evitara realizar demasiadas operaciones. Se aclara de nuevo aqui, que se usa indistintamente la como (,) o el punto (.) para indicar decimales. Ejemplos: 2,5 = 2.5 Esta situacion se debe a que en Paraguay se usa normalmente la como (,) como separador de la parte entera y su decimal, mientras que en otros paises se usa el punto (.). Se aclara esta situacion, pues las calculadoras tambien usan el punto como separador decimal.

Orden de convergencia

El orden de convergencia de un metodo mide la velocidad con que las iteraciones producidas por el metodo se aproximan a la solucion exacta. Asi, cuando mayor fuere el orden de convergencia mejor sera el metodo numerico, pues sera posible obtener mas rapidamente la solucion buscada.

Definición 10. *Sean* $\{x_k\}$ *el resultado de la aplicación de un método numérico en la iteración* k *en* $E_k = x_k - \hat{x}$*, su error. Si existiere un número* $p \geq 1$ *y su constante* $c > 0$ *tal que:* $lim_{k\to\infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|^p}$ *Donde p es el orden de convergencia*

Definición 11. *Si* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función dada, un punto* $x^* \in [a, b]$ *es un cero (o raíz) de* f *si* $f(x^*) = 0$

Gráfica de funciones, un método para hallar intervalos.

Las gráficas ayudan enormemente en la búsqueda de los ceros o raíces de una función, pues si no se conoce el intervalo que contiene la raíz de dicha función, es difícil iniciar cualquier proceso en búsqueda de solución.

Seguidamente se presentan algunas gráficas y las explicaciones necesarias para iniciar la búsqueda de solución de ecuaciones no lineales.

Ejemplo 19.

Hallar el intervalo que contiene una raíz de la función $f(x) = e^x - cos\, x$

Solucion 1: Se grafica la función $f(x) = e^x - cos\, x$

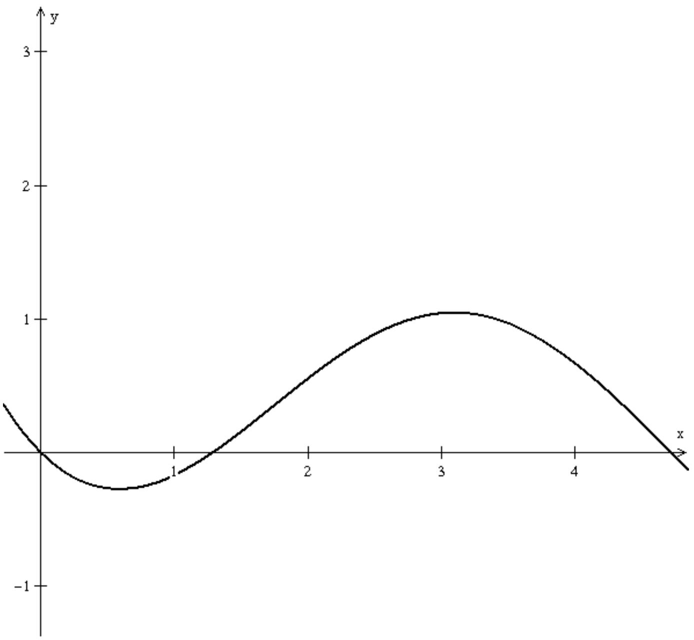

Figura 4. $f(x) = e^x - cos\, x$

Según la gráfica de la función, se tiene una raíz en el intervalo [1; 1.5] y otra raíz en [4.5; 5]. Observación: Al ser $cos(x)$ una función periódica, esta ecuación tiene infinitas soluciones.

Solucion 2:

Se la función $f(x) = e^x - cos\,x = 0$, esto implica $0 = e^x - cos\,x$, si $e^x - cos\,x = 0$ entonces $e^x = cos\,x$, asi $y_1 = y_2$, de esta manera $y_1 = e^x$ y $cos\,x = y_2$ se grafican por serparado

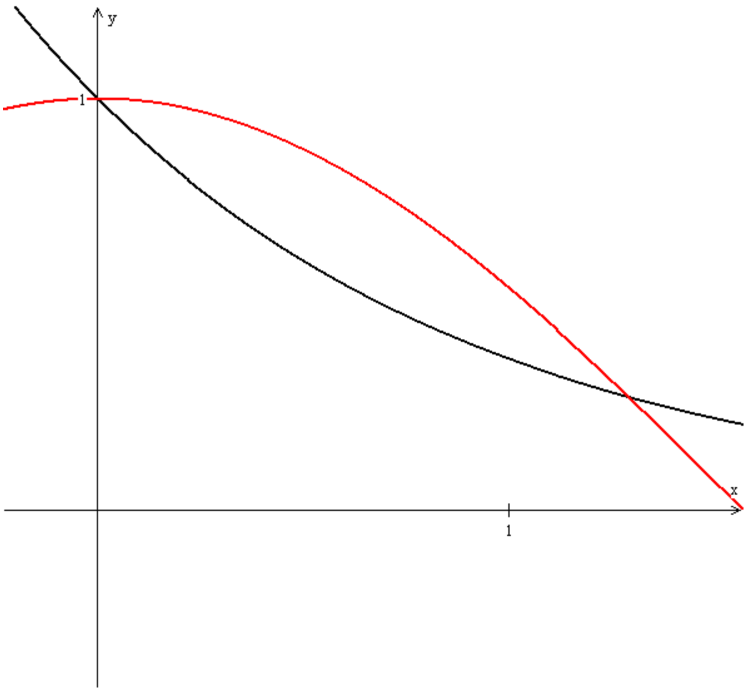

Figura 5. $y_1 = e^x$ y $cos\,x = y_2$

La intersección de las dos curvas es un cero de la función sobre *x*, lo cual indica que una raíz se encuentra en el intervalo [1; 1.5], como en el caso anterior.

Comentarios Si se realiza la gráfica a escala y ésta está bien definida (una gráfica muy bien hecha), se puede estimar un intervalo más reducido como [1.2; 1.4], con esto se aceleraría notablemente el proceso de aproximación a una raíz de la función (ecuación), pues se usaría menos iteraciones, por lo tanto, se resolvería el ejercicio en menos pasos. Gráficamente, los ceros de una función son los puntos de intersección de la gráfica $y = f(x)$ con el eje de las *x*.

Métodos cerrados

Los métodos numéricos que en cada paso dan un intervalo cerrado donde se encuentra la raíz buscada, son llamados métodos cerrados. Entre los más conocidos se encuentran el método de bisección y el método de la falsa posición o Regula Falsi.

Metodo de Bisección

Definición 12. *Sea f una función continua en un intervalo* $[a,b]$ *y* $f(a)\ x\ f(b) < 0$. *Entonces, por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe al menos un* $\alpha \in (a,b)$ *tal que* $f(\alpha) = 0$.

El método de la bisección es un algoritmo de búsqueda de raíces que aplicando la función / para aproximar la raíz $\alpha \in [a,b]$ consiste en dividir sucesivamente al intervalo a la mitad y seleccionando el sub-intervalo que tiene la raíz. Es un método de búsqueda incremental que divide el intervalo siempre en 2.

Si la función cambia de signo sobre un intervalo, se evalúa el valor de la función en el punto medio. La posición de la raíz se determina situándola en el punto medio del sub-intervalo donde exista cambio de signo, basándose en el teorema de Bolzano. El proceso se repite hasta mejorar la aproximación.

Supóngase que se desea resolver la ecuación $f(x)$ = 0, donde / es una función continua. Dados dos puntos *a* y *b* tal que $f(a)\ y\ f(b)$ tengan signos distintos, dice el Teorema de Bolzano que / debe tener, al menos, una raíz en el intervalo $[a,b]$.

El método de bisección divide el intervalo en dos, usando un tercer punto $c = \frac{a+b}{2}$. En este momento, existen dos posibilidades : $f(a) y f(c)\ o\ f(c)\ y\ f(b)$ tienen distinto signo. El algoritmo de bisección se aplica al sub-intervalo donde el cambio de signo ocurre.

El método de bisección no es muy eficiente, pero es mucho más seguro que otros métodos de aproximación de raíces, pues siempre converge hacia el valor buscado. Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a)f(c) < 0$, entonces este método converge a la raíz de f. De hecho, una cota del error absoluto es: $\frac{|b-a|}{2^n}$

En este método se plantea una situación práctica, esquematizando el procedimiento del método de bisección, se pueden considerar los siguientes puntos.Encontrar dos números: *a y b* con *a* < *b* en los cuales el polinomio *P* toma valores cuyos signos son distintos.

Considerando que: $x_1 = \frac{a+b}{2}$ es el punto medio del intervalo $[a, b]$.

Si: $P(x_1) = 0$, X_1 es la raíz buscada, si $P(x_1) \neq 0$ entonces:

a) Se elige uno de los intervalos $[a, x_1]\ o\ [\ x_1, b]$ de tal manera que los extremos del intervalo del polinomio tome valores cuyos signos sean distintos.

Se repite el procedimiento en el intervalo elegido.

Observaciones: La longitud del intervalo es una estimación del error cometido al aproximar la raíz. La