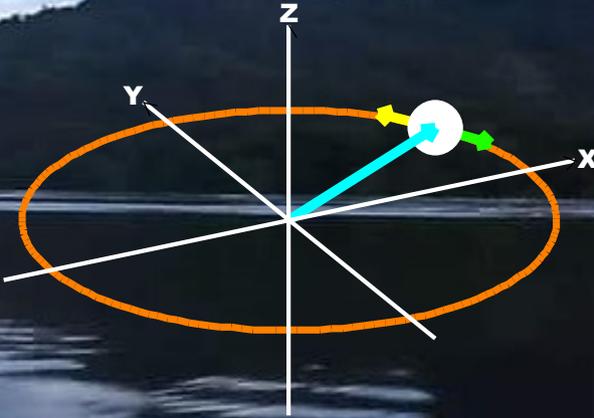


MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME INTRÍNSECAMENTE RELATIVO

DINAMICA DE UNA PARTICULA PUNTUAL



Cayetano Robayo Martínez

Ingeniero eléctrico M.Sc.

Autor:

Cayetano Robayo Martínez @CRoM97

Ingeniero eléctrico M.Sc. - Universidad de los Andes.
Bogotá, Colombia.

Prohibida la reproducción parcial o total de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del autor.

ISBN: 978-958-49-4781-9



1ªEdición-diciembre-2021. 1ªReimpresión-febrero-2022. Bogotá,
Colombia.

Fotografía de portada departamento de Guainía (Colombia) - Eder Saldaña.

“El movimiento más simple en el universo podría ser el que describe una partícula puntual (p) alrededor de un eje de giro de radio (r) trazando una circunferencia.

Si el desplazamiento se realiza a una velocidad angular (ω) constante, este corresponde a un Movimiento Circular Uniforme o MCU.

... en un MCU la dirección varía en cada instante, de modo que la mecánica de dicho desplazamiento quedará plenamente definida por los vectores de velocidad (v) y aceleración (a).

Cuando el MCU de una partícula (p) se registra en el mismo intervalo de tiempo desde diferentes sistemas de referencia, se tendrá un MCU Intrínsecamente Relativo.”

CRoM

Contenido

1	PREFACIO	21
2	MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME INTRÍNSECAMENTE RELATIVO DE UNA PARTÍCULA PUNTUAL	23
I.	VELOCIDAD	25
2.1	Velocidad en el Movimiento Circular Uniforme $\langle v@MCU \rangle$	25
2.1.1	Vector de posición $\langle r(t) \rangle$	25
2.1.2	Vector de velocidad angular $\langle \omega(t) \rangle$	26
2.1.3	Longitud de arco $\langle s(t) \rangle$	29
2.1.4	Velocidad en el MCU	30
2.1.5	Derivada en el tiempo del vector de posición $\langle r(t) \rangle$	32
2.2	Movimiento Rectilíneo Relativo $\langle MR_R \rangle$	39
2.2.1	Primer evento $\langle E1 \rangle$	39
2.2.2	Segundo evento $\langle E2 \rangle$	43
2.3	Movimiento Circular Uniforme Relativo $\langle MCU_R \rangle$ - E3	47
2.3.1	Tercer evento $\langle E3 \rangle$	47
2.3.2	Estimación del MCU_R	51
2.4	Velocidad en el MCU Relativo $\langle v@MCU_R \rangle$ - E3	55
2.4.1	Estimación de la velocidad media en el MCU_R - E3	58
2.4.2	Estimación de la velocidad instantánea en el MCU_R - E3	61
2.5	Movimiento Circular Uniforme Relativo $\langle MCU_R \rangle$ - E4	68
2.5.1	Cuarto evento $\langle E4 \rangle$	68

2.5.2	Estimación del MCU_{IR}	72
2.6	Velocidad en el MCU Relativo $\langle v@MCU_R \rangle$ - E4	76
2.6.1	Estimación de la velocidad media en el MCU_R - E4	79
2.6.2	Estimación de la velocidad instantánea en el MCU_R - E4	81
2.7	Movimiento Circular Uniforme Intrínsecamente Relativo $\langle MCU_{IR} \rangle$	87
2.7.1	MCU_{IR} en el tiempo $\langle t = t_0 \rangle$	90
2.7.2	MCU_{IR} en el tiempo $\langle t = t_1 \rangle$	91
2.8	Postulado sobre MCU_{IR}	93
2.9	Velocidad en el MCU Intrínsecamente Relativo $\langle v@MCU_{IR} \rangle$	95
2.10	Postulado sobre la velocidad en un MCU_{IR}	99
II.	ACELERACIÓN	103
2.11	Aceleración en el Movimiento Circular Uniforme $\langle a@MCU \rangle$	103
2.11.1	Expresión completa de la aceleración en el $MCU \langle a@MCU \rangle$	104
2.11.2	Estimación de la aceleración en el MCU_R del evento E4	106
2.12	Aceleración en el MCU Intrínsecamente Relativo $\langle a@MCU_{IR} \rangle$	110
2.12.1	Estimación de la aceleración media en el MCU_{IR}	114
2.12.2	Aceleración instantánea en el MCU_{IR}	130
2.12.3	Correlación entre aceleración instantánea y media en el MCU_{IR}	140
2.13	Postulado sobre la aceleración en un MCU_{IR}	142

Lista de Figuras

Figura 2.1.1 - Vector de posición $\langle r_t \rangle$ en el plano $\langle x \& y \rangle$	26
Figura 2.1.2 - Variación del ángulo $\langle \Delta\theta t \rangle$	27
Figura 2.1.3 - Vector de variación de la longitud de arco $\langle \Delta s t \rangle$	30
Figura 2.1.4 - Vector de variación de posición $\langle \Delta r t \rangle$	31
Figura 2.1.5 - Vector de velocidad instantánea $\langle v t \rangle$	33
Figura 2.1.6 - Variación infinitesimal de los vectores unitarios $\langle i \& j \rangle$ en el tiempo	37
Figura 2.2.1- Movimiento Rectilíneo Relativo $\langle E1A :: P'P \rangle$	40
Figura 2.2.2 - Movimiento Rectilíneo Relativo $\langle E1B :: PP' \rangle$	42
Figura 2.2.3- Movimiento Rectilíneo Relativo $\langle E2A :: P'P \rangle$	44
Figura 2.2.4- Movimiento Rectilíneo Relativo $\langle E2B :: PP' \rangle$	45
Figura 2.3.1- Movimiento Circular Uniforme Relativo $\langle E3A :: P'P \rangle$	47
Figura 2.3.2- Movimiento Circular Uniforme Relativo $\langle E3B :: PP' \rangle$	49
Figura 2.4.1- Velocidad media del MCU-Relativo $\langle E3A :: P'P \rangle$	56
Figura 2.4.2- Velocidad media del MCU-Relativo $\langle E3B :: PP' \rangle$	57
Figura 2.4.3- Velocidad instantánea del MCU-Relativo $\langle E3A :: P'P \rangle$	63
Figura 2.4.4 - Velocidad instantánea del MCU-Relativo $\langle E3B :: PP' \rangle$	64
Figura 2.5.1 - Movimiento Circular Uniforme Relativo $\langle E4A :: P'P \rangle$	68
Figura 2.5.2 - Movimiento Circular Uniforme Relativo $\langle E4B :: PP' \rangle$	71
Figura 2.6.1- Velocidad media del MCU-Relativo $\langle E4A :: P'P \rangle$	77

Figura 2.6.2– Velocidad media del MCU-Relativo $\langle E4B :: P'P' \rangle$	78
Figura 2.6.3– Velocidad instantánea del MCU_R $\langle E4A :: P'P \rangle$	83
Figura 2.6.4– Velocidad instantánea del MCU_R $\langle E4B :: P'P' \rangle$	84
Figura 2.7.1 – Desplazamiento aparente del vector $\langle \rho \rangle$	88
Figura 2.7.2 – Vector de velocidad instantánea $\langle -u(t) \rangle$	90
Figura 2.7.3– Movimiento del vector de posición $\langle r_0 \rangle$	91
Figura 2.7.4– Movimiento del vector de posición $\langle r_1 \rangle$	92
Figura 2.7.5– Vector de velocidad instantánea $\langle -u_1 \rangle$	93
Figura 2.8.1– MCU Intrínsecamente Relativo MCU_IR	94
Figura 2.10.1 – La velocidad relativa en un MCR_IR	101
Figura 2.11.1 – Vector de aceleración $\langle a(t) \rangle$	104
Figura 2.11.2 – La aceleración media $\langle E4 :: P'P \rangle$	107
Figura 2.11.3 – La aceleración instantánea $\langle E4 :: P'P \rangle$	109
Figura 2.12.1 – Vector de aceleración media $\langle amv \rangle :: P' \rightarrow P$	115
Figura 2.12.2 – Vector de aceleración media $\langle -amu \rangle :: P' \rightarrow P$	117
Figura 2.12.3 - Primera relación	119
Figura 2.12.4 – Segunda relación	120
Figura 2.12.5 – Tercera relación	122
Figura 2.12.6 – Cuarta relación	124
Figura 2.12.7 – Vectores de velocidad y aceleración media $\langle MCU_IR :: P'P \rangle$	124
Figura 2.12.8 – Vectores de velocidad relativa $\langle MCU_IR :: P'P \rangle$	127
Figura 2.12.9 – Aceleración media relativa $\langle amv' \rangle$ registrada por el observador en reposo	130
Figura 2.12.10 – Aceleración media relativa $\langle amu' \rangle$ registrada por el observador en movimiento	131

Figura 2.12.11 – Aceleración instantánea relativa $\langle av' \rangle$ registrada por el observador en reposo	136
Figura 2.12.12 – Aceleración instantánea relativa $\langle au' \rangle$ registrada por el observador en movimiento	139
Figura 2.13.1 - Aceleración relativa registrada por el observador en reposo	144
Figura 2.13.2 - Aceleración relativa registrada por el observador en movimiento	145

Lista de Tablas

Tabla 2.3.1 – Coordenadas de posición de la partícula $\langle p@R(0.0) \rangle$	51
Tabla 2.3.2 – Coordenadas de posición del observador en movimiento $\langle p'@R(0.0) \rangle$	52
Tabla 2.3.3 – Coordenadas del observador en movimiento $\langle p'@R(-6.5)' \rangle$	52
Tabla 2.3.4 – Vector de posición de la partícula $\langle r@R(0,0) \rangle$	52
Tabla 2.3.5 – Vector de variación de posición $\langle \Delta r @R(0,0) \rangle$	52
Tabla 2.3.6 – Vector de posición del observador en movimiento $\langle \rho@R(0,0) \rangle$	53
Tabla 2.3.7 – Vector de posición del observador en movimiento $\langle \rho@R(-6,5)' \rangle$	53
Tabla 2.3.8 – Vector de variación del observador en movimiento $\langle \Delta \rho@R(0,0) \rangle$	53
Tabla 2.3.9 – Vector de posición relativa $\langle r'@R(0.0) \rangle$	54
Tabla 2.3.10 – Vector de variación de posición relativa $\langle \Delta r'@R(0.0) \rangle$	54
Tabla 2.3.11 – Corrimiento – Vector de variación de posición relativa $\langle \Delta r'@R(0.0) \rangle$	54
Tabla 2.3.12 – Vector de posición relativa inicial $\langle \rho'@R(0.0) \rangle$	54
Tabla 2.3.13 – Vector de variación de posición relativa $\langle \Delta \rho'@R(0.0) \rangle$	55
Tabla 2.3.14 – Corrimiento – Vector de variación de posición relativa $\langle \Delta \rho'@R(0.0) \rangle$	55
Tabla 2.4.1 – Vectores de velocidad media	59
Tabla 2.4.2 – Corrimiento – Vector de velocidad media relativa final $\langle vm1' \rangle :: \textit{origen}_{\langle um1 \rangle}$	59

Tabla 2.4.3 – Corrimiento – Vector de velocidad media relativa final $\langle um1' \rangle :: origen_{\langle vm1 \rangle}$	59
Tabla 2.4.4 – Corrimiento – Vector de velocidad media final $\langle vm1 \rangle :: origen_{\langle r1 \rangle}$	59
Tabla 2.4.5 – Corrimiento – Vector de velocidad media final $\langle um1 \rangle :: origen_{\langle \rho1 \rangle}$	60
Tabla 2.4.6 – Corrimiento – Vector de velocidad media relativa final $\langle vm1' \rangle :: origen_{\langle um1 \rangle}$	60
Tabla 2.4.7 – Corrimiento – Vector de velocidad media relativa final $\langle um1' \rangle :: origen_{\langle vm1 \rangle}$	60
Tabla 2.4.8 – Vectores de velocidad inicial	62
Tabla 2.4.9 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa inicial $\langle v0' \rangle :: origen_{\langle u0 \rangle}$	63
Tabla 2.4.10 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa inicial $\langle u0' \rangle :: origen_{\langle v0 \rangle}$	63
Tabla 2.4.11 – Corrimiento - Vector de velocidad inicial $\langle v0 \rangle :: origen_{\langle \rho0 \rangle}$	64
Tabla 2.4.12 – Corrimiento - Vector de velocidad inicial $\langle u0 \rangle :: origen_{\langle p0 \rangle}$	64
Tabla 2.4.13 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa inicial $\langle v0' \rangle :: origen_{\langle u0 \rangle}$	65
Tabla 2.4.14 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa inicial $\langle u0' \rangle :: origen_{\langle v0 \rangle}$	65
Tabla 2.4.15 – Vectores de velocidad final	66
Tabla 2.4.16 – Corrimiento - Vector de velocidad final $\langle v1 \rangle :: origen_{\langle p1 \rangle}$	66
Tabla 2.4.17 – Corrimiento - Vector de velocidad final $\langle u1 \rangle :: origen_{\langle p1' \rangle}$	66
Tabla 2.4.18 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa final $\langle v1' \rangle :: origen_{\langle u1 \rangle}$	67

Tabla 2.4.19 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa final $\langle u1' \rangle :: \text{origen}_{\langle v1 \rangle}$	67
Tabla 2.4.20 – Corrimiento - Vector de velocidad final $\langle v1 \rangle :: \text{origen}_{\langle p1 \rangle}$	67
Tabla 2.4.21 – Corrimiento - Vector de velocidad final $\langle u1 \rangle :: \text{origen}_{\langle p1' \rangle}$	67
Tabla 2.5.1 – Coordenadas de posición de la partícula $\langle P @ R(0.0) \rangle$	73
Tabla 2.5.2 – Coordenadas del observador en movimiento $\langle P' @ R(0.0) \rangle$	73
Tabla 2.5.3 – Vector de posición de la partícula $\langle r @ R(0.0) \rangle$	73
Tabla 2.5.4 – Vector de variación de posición $\langle \Delta r @ R(0.0) \rangle$	73
Tabla 2.5.5 – Vector del observador en movimiento $\langle \rho @ R(0.0) \rangle$	74
Tabla 2.5.6 – Vector de variación del observador en movimiento $\langle \Delta \rho @ R(0.0) \rangle$	74
Tabla 2.5.7 – Vector de posición de relativa $\langle r' @ R(0.0) \rangle$	74
Tabla 2.5.8 – Vector de variación de posición relativa $\langle \Delta r' @ R(0.0) \rangle$	75
Tabla 2.5.9 – Corrimiento – Vector de variación posición relativa $\langle \Delta r' \rangle :: \text{origen}_{\langle \Delta \rho \rangle}$	75
Tabla 2.5.10 – Vector de posición relativa $\langle \rho' @ R(0,0) \rangle$	75
Tabla 2.5.11 – Vector de variación de posición relativa $\langle \Delta \rho' @ R(0,0) \rangle$	75
Tabla 2.5.12 – Corrimiento – Vector de variación de posición relativa $\langle \Delta \rho' \rangle :: \text{origen}_{\langle \Delta r \rangle}$	76
Tabla 2.6.1 – Vectores de velocidad media	79
Tabla 2.6.2 – Corrimiento – Vector de velocidad media relativa $\langle vm1' \rangle :: \text{origen}_{\langle um1 \rangle}$	80

Tabla 2.6.3 – Corrimiento – Vector de velocidad media relativa $\langle um1' \rangle :: \text{origen}_{\langle vm1 \rangle}$	80
Tabla 2.6.4 – Corrimiento – Vector de velocidad media final $\langle vm1 \rangle :: \text{origen}_{\langle r1 \rangle}$	80
Tabla 2.6.5 – Corrimiento – Vector de velocidad media final $\langle um1 \rangle :: \text{origen}_{\langle \rho1 \rangle}$	81
Tabla 2.6.6 – Vectores de velocidad inicial	82
Tabla 2.6.7 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa inicial $\langle v0' \rangle :: \text{origen}_{\langle u0 \rangle}$	83
Tabla 2.6.8 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa inicial $\langle u0' \rangle :: \text{origen}_{\langle v0 \rangle}$	83
Tabla 2.6.9 – Corrimiento - Vector de velocidad inicial $\langle v0 \rangle :: \text{origen}_{\langle p0 \rangle}$	84
Tabla 2.6.10 – Corrimiento - Vector de velocidad inicial $\langle u0 \rangle :: \text{origen}_{\langle p0' \rangle}$	84
Tabla 2.6.11 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa inicial $\langle v0' \rangle :: \text{origen}_{\langle u0 \rangle}$	85
Tabla 2.6.12 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa inicial $\langle u0' \rangle :: \text{origen}_{\langle v0 \rangle}$	85
Tabla 2.6.13 – Vectores de velocidad final	86
Tabla 2.6.14 – Corrimiento - Vector de velocidad inicial $\langle v1 \rangle :: \text{origen}_{\langle p1 \rangle}$	86
Tabla 2.6.15 – Corrimiento - Vector de velocidad inicial $\langle u1 \rangle :: \text{origen}_{\langle p1' \rangle}$	86
Tabla 2.6.16 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa $\langle v1' \rangle :: \text{origen}_{\langle u1 \rangle}$	86
Tabla 2.6.17 – Corrimiento - Vector de velocidad relativa $\langle u1' \rangle :: \text{origen}_{\langle v1 \rangle}$	87
Tabla 2.11.1 – Vectores de variación de velocidad	108

Tabla 2.11.2 – Corrimiento – Vector de variación de velocidad $\langle \Delta v \rangle :: \text{origen}_{\langle v0 \rangle}$	108
Tabla 2.11.3 – Corrimiento - Vector de variación de velocidad $\langle \Delta u \rangle :: \text{origen}_{\langle u0 \rangle}$	108
Tabla 2.11.4 – Vectores de aceleración media	108
Tabla 2.11.5 – Vectores de aceleración instantánea inicial	110
Tabla 2.11.6 – Vectores de aceleración instantánea final	110
Tabla 2.12.1 – Vector de aceleración media $\langle amv @ R(0,0) \rangle$	115
Tabla 2.12.2 – Corrimiento - Vector de variación velocidad $\langle \Delta v \rangle :: \text{origen}_{\langle v0 \rangle}$	116
Tabla 2.12.3 – Vector de aceleración media $\langle -amu @ R(x, y) \rangle$	117
Tabla 2.12.4 – Corrimiento - Vector de variación velocidad $\langle \Delta u \rangle :: \text{origen}_{\langle u0 \rangle}$	117
Tabla 2.12.5 – Vector de aceleración media $\langle amv + @ R(0,0) \rangle$	120
Tabla 2.12.6 – Corrimiento - Vector de variación velocidad $\langle \Delta v + \rangle :: \text{origen}_{\langle v0 \rangle}$	120
Tabla 2.12.7 – Vector de aceleración media $\langle -amu - @ R(x, y) \rangle$	122
Tabla 2.12.8 – Corrimiento - Vector de variación velocidad $\langle \Delta u - \rangle :: \text{origen}_{\langle u0 \rangle}$	122
Tabla 2.12.9 – Vector de aceleración relativa media en el MCU_IR $\langle am' \rangle$	128
Tabla 2.12.10 – Aceleración media relativa registrada por el observador en reposo $\langle amv' \rangle$	129
Tabla 2.12.11 – Aceleración media relativa registrada por el observador en movimiento $\langle amu' \rangle$	129
Tabla 2.12.12 – Aceleración instantánea relativa registrada por el observador en reposo	135
Tabla 2.12.13 – Aceleración instantánea relativa registrada por el observador en movimiento	138

1 PREFACIO

Aunque el Movimiento Circular Uniforme – MCU de una partícula puntual¹ ha sido ampliamente estudiado en los textos de física, el formalismo matemático presenta resultados que a juicio del autor no han sido explicados completamente por la física de la mecánica de dicho movimiento.

En el MCU de una partícula puntual definido por un vector de posición, con inicio en el origen de un sistema de referencia de un observador en reposo, que al girar alrededor de una circunferencia en el sentido dado por una velocidad angular constante, la mecánica del movimiento queda determinada por los vectores de velocidad y aceleración de la partícula.

No hay duda que al evaluar la variación del vector de posición en un intervalo de tiempo finito, se puede obtener el sentido y la dirección del vector de su velocidad media. Igualmente al evaluar la variación del vector de velocidad en el mismo intervalo de tiempo se puede obtener el sentido y la dirección del vector de aceleración media que explican plenamente la mecánica del movimiento de la partícula.

Para la academia, la velocidad y aceleración instantánea se obtienen al evaluar la primera y segunda derivadas en el tiempo² del vector de posición, respectivamente.

Pero al evaluar la primera derivada en el tiempo del vector de posición, se obtiene la suma de dos vectores: el primero tiene la dirección de la velocidad angular, y la dirección del segundo vector depende de la dirección de la derivada en el tiempo de los vectores unitarios.

Si los vectores unitarios giran en la dirección de la velocidad angular, el resultado de la suma vectorial es dos veces la velocidad; y si giran en la dirección contraria, la suma vectorial es cero. A juicio del autor, las anteriores soluciones matemáticas son contradictorias a lo aceptado por la academia y en ningún caso corresponden a la

¹ Una partícula puntual es un punto carente de dimensiones.

² En este caso el intervalo de tiempo es infinitesimal.

velocidad instantánea de la partícula si previamente no ha sido definida su dirección y sistema de referencia.

El actual estudio demuestra matemáticamente que los vectores unitarios giran en la dirección contraria a la velocidad angular y, por lo tanto, la evaluación de la primera derivada en el tiempo del vector de posición es cero y no corresponde a la velocidad instantánea de la partícula sino a un *vector de velocidad relativa* enmarcado en un *Movimiento Circular Uniforme Intrínsecamente Relativo - MCU_IR*.³

Por otra parte, al evaluar la segunda derivada en el tiempo del vector de posición se obtiene la suma de cuatro vectores: la dirección de dos de los vectores será definida por la dirección de la velocidad angular, y la dirección de los otros dos vectores depende del sentido del giro de los vectores unitarios; y dado que el resultado de la primera derivada es cero no es sorprendente que también la suma de los cuatro vectores de aceleración sea cero. A juicio del autor la anterior solución matemática tampoco corresponde a la aceleración instantánea de la partícula sino a un *vector de aceleración relativa*⁴ enmarcada en un MCU_IR.

El actual estudio presenta las correlaciones relativas de un MCU en las cuales un observador en reposo y un observador en movimiento que viaje como huésped de la partícula, registran en el mismo instante de tiempo la nulidad de la velocidad o aceleración relativas de la partícula en el marco de un MCU_IR, y que a partir de dicha nulidad es posible obtener la velocidad y aceleración instantánea si previamente ha sido definida su dirección y sistema de referencia.

...los anteriores planteamientos son puestos en consideración de la comunidad académica, con el propósito de contribuir con el escrutinio al que debería someterse la física, para que sus resultados ofrezcan la fiabilidad que de todos los estudiosos se espera.

³ El MCU_IR y el vector de velocidad relativa en un MCU_IR son postulados que el autor pone en consideración de la comunidad académica.

⁴ El vector de aceleración relativa en un MCU_IR es un postulado que el autor pone en consideración de la comunidad académica.