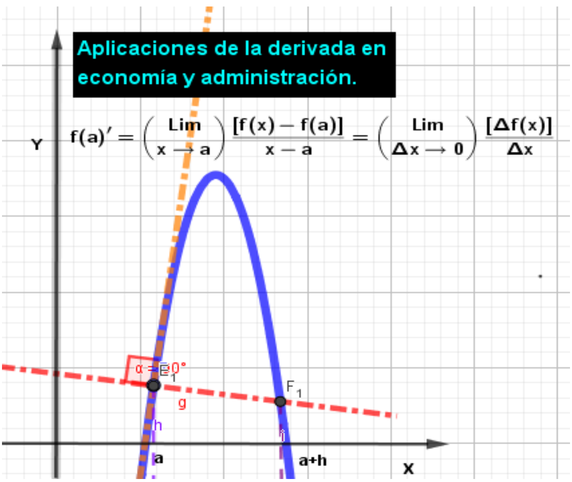
INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR. “MARIANO SAMANIEGO”

El Instituto católica de la frontera sur.

MODALIDAD PRESENCIAL.

LIBRO DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA “ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS” EN EL SIGLO XXI.


Aplicaciones de la derivada en economía y administración.
$f(a)' = \left(\lim_{x \to a}\right) \frac{[f(x) - f(a)]}{x - a} = \left(\lim_{\Delta x \to 0}\right) \frac{[\Delta f(x)]}{\Delta x}$
Y
X
E_1
F_1
g
h
a
a+h

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR.

“MARIANO SAMANIEGO”

El Instituto católica de la frontera sur.

MODALIDAD PRESENCIAL.

LIBRO DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA ADM

DE EMPRESAS, EN EL SIGLO XXI.

DATOS DE IDENTIFICACIÓN:

CARRERA : Administración de Empresas.

AUTOR : Lic. Humberto Sarango.

TELÉFONO PERSONAL : 2688-450

TELÉFONO INSTITUCIONAL : 072688-230

MATERIAL DE USO DIDÁCTICO PARA ESTUDIANTES DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR “MARIANO SAMANIEGO”

Contenidos.

CAPÍTULO.4.

Prefacio.

Para el docente.

❖ **Filosofía.** En esta obra de ciencia científica para estudiantes de nivel superior, reflejamos nuestra filosofía de que un libro de cálculo diferencial para administración de empresas, debe ser claro, exacto, profundo y preciso que permita profundizar en la comprensión y el significado del enunciado de los problemas para poder dar una solución óptima y tomar la mejor decisión en los mismos. Por lo tanto, a lo largo del libro hemos puesto énfasis en la resolución de ejemplos desarrollados y problemas como medio de comprensión. Los ejercicios y problemas desarrollados están diseñados para motivar, instruir y guiar en forma precisa a los estudiantes de nivel superior. A la vez, los ejercicios y problemas de aplicación planteados, les brindan la oportunidad de probar su comprensión, desafiar su intelecto y aplicar sus conocimientos a situaciones del mundo real y globalizante.

❖ **Público y flexibilidad.** Escribimos este libro para presentar temas de logaritmos, funciones, límites de funciones, derivada general de funciones y derivada especial de funciones de modo que se facilite el manejo de los contenidos y conocimientos de cálculo diferencial para los estudiantes que optan por la cerrera de administración de empresas.

Hemos incluido suficiente material para un curso normal de un semestre. La cantidad de temas abordados permite que el docente elija los que considere más apropiados para lograr el objetivo de la materia de cálculo diferencial en administración de empresas, sin desvincular los conocimientos previos y las habilidades que los estudiantes adquirieron en los estudios secundarios. La obra puede servir como preparación para las potencias de exponentes irracionales, estudio de las funciones y límites de funciones, pasos fundamentales y precisos para el desarrollo de cálculo diferencial, no sólo en administración de empresas sino en las diferentes carreras tecnológicas y universitarias donde reciben esta materia.

Características.

- **Ejemplos y problemas de aplicación desarrollados.** Nuestra experiencia nos ha demostrado que los ejemplos y problemas de aplicación desarrollados son la principal fuente de aprendizaje en un libro de cálculo diferencial para administración de empresas. Hemos visto que la mayoría de los estudiantes de nivel superior y el público en general, entendidos en esta materia, se basan en los ejemplos y problemas desarrollados para fijar sus conocimientos y proceder a desarrollar algunos ejercicios y problemas de aplicación formulados en cada capítulo, muy poco en los teoremas, axiomas y demostraciones. Por lo tanto, hemos incluido gran cantidad de ejemplos y problemas desarrollados, que involucran los conceptos teóricos, reglas, proceso analítico y proceso gráfico, con una estructura secuenciada de fácil comprensión en cada ejercicio y problema de aplicación con el fin de que el estudiante de nivel superior cumpla con los retos planteados por el docente en cada capítulo.

❖ **Ejercicios y problemas de aplicación planteados.**

En este libro de cálculo diferencial para administración de empresas, en cada capítulo se plantea ejercicios y problemas de aplicación que deben ser desarrollados por el estudiante de nivel superior o los que planifique el docente de la materia, cuya finalidad es fijar muy bien los conocimientos de cálculo diferencial en administración de empresas con el propósito de dar solución a los problemas que se nos pueden presentar a nivel local, provincial, nacional, internacional y globalizante en la vida cotidiana y se tome la mejor decisión en los mismos.

❖ **Actividades de refuerzo del capítulo**

En cada capítulo se plantea una actividad de refuerzo con ítems de: verdadero, falso, completación, ejercicios y problemas de aplicación que deben ser desarrollados por el estudiante de nivel superior, con el fin de reforzar el aprendizaje y los conocimientos.

Agradecimientos.

- ❖ Aprovecho la oportunidad para manifestar mi sincero y especial agradecimiento al honorable **Reverendo Padre. Mgs. Segundo Pardo Rojas Rector** del Instituto Tecnológico Superior “Mariano Samaniego” y a la **Lic. Mónica Cueva. Coordinadora de la carrera de Administración de Empresas.**, quienes amablemente compartieron sus puntos de vista sobre la necesidad de editar un libro de cálculo diferencial para administración de empresas, cuyas ideas me motivaron hacer realidad este recurso didáctico para los estudiantes de administración de empresas que tienen que cursar la materia de cálculo y por ende para el público en general que gusta elevar sus conocimientos en el aprendizaje consciente y razonado en la solución de los múltiples problemas del diario vivir. Finalmente con amor, afecto y cariño dedico este libro de contenido científico a mi querida familia quienes me ayudaron y colaboraron con su tiempo para hacer realidad este libro. A mis padres, que siempre han estado en los buenos y malos momentos guiándome por el sendero del bien y de la prosperidad. Por ultimo solicito muy comedidamente, a quienes utilicen este libro me brinden las sugerencias o recomendaciones por medio del editor en:

humbertosarango@hotmail.com

CAPITULO.1.

1.1. Introducción a los logaritmos.

Es importante realizar una breve revisión de los logaritmos porque posteriormente se utilizará este capítulo para abreviar el proceso de la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas que se presentará en este libro, es así que la palabra logaritmo procede de la unión de los vocablos griegos “logos” que significa “razón” y “arithmos” traducido por “números”. La invención de logaritmos nos permiten un tremendo alivio en tediosas operaciones con grandes o pequeños números. Como luego se verá con la aplicación de las propiedades o leyes de los logaritmos en los procesos, métodos y técnicas son más fáciles de hacer y obtener el resultado final. Hoy en día las calculadoras ya tienen incorporados los logaritmos, en este capítulo lo que se pretende es dar a conocer el fundamento de los logaritmos, sus propiedades en la aplicación de ejercicios y problemas cuya utilidad posterior será muy significativa en el desarrollo de las derivadas de funciones.

Estimado(a), estudiante observe detenidamente la siguiente tabla.

Potencia	**Resultado (N)**	**Base (b)**	**Exponente (x)**	**Log $_b$ N**
$(10)^{-3}$	0.001	10	-3	Log_{10} (0
$(10)^{-2}$	0.01	10	-2	Log (0.0
$(10)^{-1}$	0.1	10	-1	Log_{10} (0
$(10)^{1}$	10	10	1	Log (10

$(10)^2$	100	10	2	Log (10
$(10)^3$	1000	10	3	Log_{10} (1

De acuerdo a las consideraciones anteriores, se afirma que el logaritmo de un número (N): **es el exponente x al que hay que elevar una base b** (en este caso 10) **para obtener un número N.**

Si b>0 y b≠0, se define logaritmo en base b de N y se escribe $\log_b N$ al valor x al que hay que elevar b para obtener N. por lo tanto $\log_b N = X \Leftrightarrow b^x = N$

Nota. Tener presente que los logaritmos de base 10 no necesitan especificar la base como Ud, observa en la tabla anterior en algunos casos no se la escribe, es decir que si escribimos o vemos escrito log 2562 se sobreentiende que la base es 10. Las demás bases necesitan especificarse obligadamente excepto cuando se utiliza como base el número e aunque, en este caso, los logaritmos tienen “apellido” pues en honor a Neper se les conoce como **logaritmos neperianos** y se utiliza la notación ln. Finalmente a la parte entera del logaritmo se le llama **característica** y a la parte decimal, **mantisa.** En la actualidad, todos los cálculos se realizan con la calculadora y muy poco se recurre a las tablas logarítmicas para determinar sus partes.

1.2. Cálculo de logaritmos de base 10 y de diferente base.

Ejemplos desarrollados.

1. Calcula log 1000000 = 6 Rta.

2. Determine log 0.00001 = -5 Rta.

$10^x = 1000000$

$10^x = 0{,}00001$

$(10)^6 = 1000000$

$(10)^{-5} = 0{,}00001$

3. Calcula log 10000 = 4 Rta.

4. Determine log 0.01 = -2 Rta.

$10^x = 10000$

$10^x = 0{,}01$

$(10)^4 = 10000$

$(10)^{-2} = 0{,}01$

5. Calcula $\log_3 27 = 3$ Rta. 6.

Determine $\log_2 0.125 = -3$ Rta.

$3^x = 27$

$2^x = 0{,}125$

$(3)^3 = 27$

$(2)^{-3} = 0,125$

$(1/8) = 0.125$

7. Calcula $\log_{1/9} (1/243) = 5/2$ Rta.

8. Determine $\log_4 (1/2) = -1/2$ Rta.

$(1/9)^x = 1/243$

$4^x = 1/2$

$(1/9)^{5/2} = 1/243$

$(4)^{-1/2} = 1/2$

$\sqrt[2]{(\frac{1}{9})^5} = 1/243$

$(\frac{1}{\sqrt{4}}) = 1/2$

9. Calcula $\log_4 64 = 3$ Rta.

10. Determine $\log_8 4096 = 4$ Rta.

$4^x = 64$

$8^x = 4096$

$(4)^3 = 64$

$(8)^4 = 4096$

1.3. Propiedades de los logaritmos.

1. Siempre los logaritmos de los números mayores que uno son positivos y los logaritmos de los números positivos menores que uno son negativos.

2. El cero y los números negativos no tienen logaritmos

3. A cada número le corresponde uno y sólo un logaritmo.

4. Todo logaritmo de la base siempre es igual a uno.

5. Cualquiera que sea la base, el logaritmo de uno siempre es igual a cero.

6. Logaritmo de un producto. Es igual a la adición de los logaritmos de cada uno de sus factores.

Fórmula: $\text{Log}_b(a*b*c)= \log_b a +\log_b b +\log_b c$

7. Logaritmo de un cociente. Es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el

logaritmo del denominador.

Fórmula: $\text{Log}_b \left(\frac{a}{b}\right)= \log_b a - \log_b b$

8. Logaritmo de una potencia. Es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia

Fórmula: $\text{Log}_b\, a^n = n \text{ Log}_b\, a$

9. Logaritmo de una raíz enésima. Es el cociente entre el logaritmo del radicando y el índice del

radical.

Fórmula: Log $_b$ a_n^1 = $\frac{1}{n}$ log $_b$a

Log $_b$ a_n^1 = (log $_b$a)/n Log $_b$ a_n^m =

$\frac{(\log \mathrm{ba})}{n}$

Ejemplos desarrollados aplicando las propiedades de los logaritmos.

1. Calcula el log (2357) = 3, 3724

2. Determine el log (0.458) = - 0.3391

3. Desarrolla el log (0) = Imposible en los logaritmos.

4. Desarrolla el log (-4278) = Imposible en los logaritmos.

6. Calcula el log $_a$ a =1 y log $_b$ b =1

$a^x = a$

$b^x = b$

$(a)^1 = a$

$(b)^1 = b$

7. Calcula el $\log_a 1 = 0$ y

$\log_c 1 = 0$

$a^x = 1$

$c^x = 1$

$(a)^0 = 1$

$(c)^0 = 1$

8. Determina el log (6*7*12)

Log (6*7*12) = log (6) + log (7) + log (12)

Log (6*7*12) = 0.7782 + 0.8451 + 1.0792

Log (6*7*12) = 2,7025

9. Determina el log (6/11)

Log $\frac{6}{11}$ = log (6) - log (11)

Log $\frac{6}{11}$ = 0.7782 - 1.0414

Log $\frac{6}{11}$ = - 0.2632

10. Desarrolle el log $(15)^4$

log $(15)^4$ = 4*log (15)

log $(15)^4$ = 4*(1, 1761)

log $(15)^4$ = 4,7044

11. Calcula el log $\sqrt{259}$ = log $(259)^{\frac{1}{2}}$

log $\sqrt{259}$ = $\frac{\log(259)}{2}$

log $\sqrt{259}$ = $\frac{2{,}4133}{2}$

log $\sqrt{259}$ = 1,2067

12. Resuelve el log $(\frac{32*100}{75})^{2/3}$

Log $(\frac{32*100}{75})^{2/3}$ = $\frac{2}{3}$*[log (32) + log (100) – log (75)]

Log $(\frac{32*100}{75})^{2/3} = \frac{2}{3}$*[1,5051 + 2 – 1,8751]

Log $(\frac{32*100}{75})^{2/3} = \frac{2}{3}$*[1,63]

Log $(\frac{32*100}{75})^{2/3} = \frac{3.26}{3}$

Log $(\frac{32*100}{75})^{2/3}$ = 1,0867

13. Desarrolla el log $\sqrt[5]{\left[\frac{(800)(125)(76)}{(158)(37)}\right]^{3}}$

Log $\sqrt[5]{\left[\frac{(800)(125)(76)}{(158)(37)}\right]^{3}} = [log\ \frac{(800)(125)(76)}{(158)(37)}]^{3/5}$

Log $\sqrt[5]{\left[\frac{(800)(125)(76)}{(158)(37)}\right]^{3}} = \frac{3}{5} *$

$[\frac{\log(800)+log(125)+log(76)}{\log(158)+log(37)}]$

Log $\sqrt[5]{\left[\frac{(800)(125)(76)}{(158)(37)}\right]^{3}} = \frac{3}{5}$* [log (800) + log

(125) +log (76) – log (158) –log (37)]

Log $\sqrt[5]{\left[\frac{(800)(125)(76)}{(158)(37)}\right]^{3}} = \frac{3}{5}$* [2,9031 + 2,0969 +

1, 8808 – 2,1987 – 1,5682]

$$\text{Log } \sqrt[5]{\left[\frac{(800)(125)(76)}{(158)(37)}\right]^3} = \frac{3}{5} * [3{,}1139]$$

$$\text{Log } \sqrt[5]{\left[\frac{(800)(125)(76)}{(158)(37)}\right]^3} = \frac{9.3417}{5}$$

$$\text{Log } \sqrt[5]{\left[\frac{(800)(125)(76)}{(158)(37)}\right]^3} = 1{,}8683$$

14. Escribe cada uno de los ejemplos mediante un solo logaritmo (caso inverso de la Propiedades)

* Log (4) + log (20) + log (35) = log [(4) (20) (35)]

Log (4) + log (20) + log (35) = log (2800)

* Log (100) + log (56) - log (12) = log $[\frac{(100)(56)}{12}]$

Log (100) + log (56) - log (12) = log $[\frac{5600}{12}]$

* Log A + log B - log C - log D = log $[\frac{A*B}{C*D}]$

* 1/3[Log x + log y + log z] = log$\sqrt[3]{(x)(y)(z)}$

* 5/3[Log x + log y - log z – log w] = log

$$\sqrt[3]{\left[\frac{(x)(y)}{(z)(w)}\right]^5}$$

15. Escribe en forma logarítmica a las siguientes expresiones exponenciales.

* $6^3 = 216$

* $8^4 = 4096$

* $7^5 = 16807$

Log $_6$ 216 = 3

Log $_8$ 4096 = 4

Log $_7$ 16807 = 5

16. Exprese en forma exponencial a los siguientes logaritmos.

* Log $_9$ 6561 = 4

* Log $_{14}$ 2744 =3

* Log $_b$ a = m

$(9)^4 = 6561$

$(14)^3 = 2744$

$(b)^m = a$

* $\text{Log}_{15}\ 759375 = 5$ * $\log_{x} y = n$

* $\text{Log}_{3}\ 729 = 6$

$(15)^5 = 759375$ $(x)^n = y$

$(3)^6 = 729$

17. Resuelva los siguiente ejemplos de logaritmo natural (ln) considerando lo siguiente

$\text{Log}_{e}\ b = x \Leftrightarrow e^{x} = b$ por lo tanto $\ln_e b = x \Leftrightarrow e^{x} = b$

* $\text{Ln}_e e^7 = 7$ Rta. **Transformamos al ln a su forma exponencial**

$e^x = e^7$ **anulamos e en ambos miembros.**

$X = 7$

* $\text{Ln}\ \frac{1}{e^5} = -5$ Rta.

* $\text{Ln}_e \sqrt[3]{e} = \frac{1}{3}\ Rta$

$e^x = e^{-5}$

$e^x = \sqrt[3]{e}$

$x = -5$

$e^x = (e)^{1/3}$

$x = \frac{1}{3}$

* $\mathrm{Ln}\sqrt[6]{e^{-5}}$ = -5/6 Rta.

* $\mathrm{Ln}_{\,e}\, e\sqrt[4]{e^3}$ = 7/4 Rta.

$e^x = \sqrt[6]{e^{-5}}$

$e^x = e\sqrt[4]{e^3}$

$e^x = (e)^{-5/6}$

$e^x = e (e)^{3/4}$

$x = -5/6$

$e^x = e^{1+3/4}$

$e^x = (e)^{7/4}$

$x = 7/4$

1.4. Ecuaciones logarítmicas y ecuaciones logarítmicas naturales o Neperianas.

Se debe seguir el siguiente proceso.

1. Aplicar las propiedades de los logaritmos hasta tener un sólo logaritmo en ambos miembros de la ecuación.

2. Desarrollar la ecuación que nos queda hasta obtener la solución.

3. Verificar la validez de las soluciones obtenidas en la ecuación logarítmica.

Se procede de la siguiente manera sustituimos los valores obtenidos de x en la ecuación logarítmica. Si cumple la ecuación logarítmica y **tiene sentido,** entonces ese valor de x será solución, en caso contrario no.

4. Si obtenemos como solución un número negativo o cero, no tiene sentido sustituir este valor en la ecuación logarítmica porque es imposible los logaritmos de los mismos.

Ejemplos desarrollados.

1. Desarrolle la siguiente ecuación log (3)+log(x+5) = log (2x-3)

Log (3)+log(x-5) =log (2x-3)

Log [3(x-5)] = log (2x-3) **simplificamos el log en ambos miembros.**

[3(x-5)] = (2x-3)

3x-15 = 2x-3

3x-2x = -3+15

X = 12

Verificación.

Log (3)+log(x-5) =log (2x-3)

Log (3)+log (12-5) =log [2 (12)-3]

Log (3)+log (7) =log (24-3)

Log [(3) (7)] =log (24-3)

Log (21) = log (21)

21 = 21 **L.Q.Q.D.**

2. Resuelva la siguiente ecuación log (6-x) =

2logx

Log (6-x) = 2logx

Log (6-x) = $\log x^2$

$6-x = x^2$

$x^2 = 6-x$

$x^2+x-6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$

$x+3 = 0$ $x-2 = 0$

$x = -3$ **V.Inc.E.Log.** **x = 2 valor**

correcto ecuación logarítmica

Verificación. X = -3

Verificación. X = 2

Log (6-x) = 2logx Log (6- x) =

2logx

Imposible en los $\log(6-2) =$

$2\log 2$

logaritmos $\log(4) =$

$\log 2^2$

$\log(4) = \log$

(4)

$4 = 4$

3. Desarrolla la siguiente ecuación $\log_2(x+3)+$

$\log_2(x+4) = 1$

$\log_2(x+3)+\log_2(x+4) = 1$

$\log_2[(x+3)(x+4)] = 1$

$2^1 = [(x+3)(x+4)]$

$[(X+3)(x+4)] = 2^1$

$X^2+7x+12 = 2$

$X^2+7x+12-2 = 0$

$X^2+7x+10 = 0$

(X+5) (X+2) = 0

X+5 = 0

X+2 = 0

X = -5 V.Inc.E.Log X

= -2 V.Inc.E.Log

Verificación. X = -5

Verificación. X = -2

Log_2 (x+3)+ log_2 (x+4) = 1
Log_2 (x+3)+ log_2 (x+4) = 1

Imposible en los logaritmos

Imposible en los logaritmos.

4. Desarrolla la siguiente ecuación 2lnx =

ln(5x+10)-ln5

2lnx = ln (5x+10)-ln5

$\ln x^2 = \ln \left[\frac{(5x+10)}{5}\right]$ **simplificamos el ln en ambos**

miembros.

$x^2 = \left[\frac{(5x+10)}{5}\right]$

$5x^2 = 5x+10$

$5x^2 - 5x-10 = 0$

$5x^2/5 - 5x/5-10/5 = 0/5$

$x^2 - x- 2 = 0$

$(x -2)(x+1) = 0$

$x -2 = 0$ $x+1 =$

0

$x = 2$ $x = -1$

Verificación. X = 2 V.C.E.Ln

Verificación. X = -1 V. Inc. E.Ln

2lnx = ln (5x+10)-ln5 2lnx =

ln (5x+10)-ln5

2ln2 = ln [5(2)+10]-ln5

Imposible en los logaritmos.

$\ln 2^2 = \ln (10+10) - \ln 5$

$\ln 4 = \ln (20) - \ln 5$

$\ln 4 = \ln (\frac{20}{5})$

$\ln 4 = \ln 4$

4 = 4 L.Q.Q.C

5. Resuelve la siguiente ecuación $\ln(x+3)-\ln(x-2) = \ln(6)$

$\text{Ln}(x+3)-\ln(x-2) = \ln(6)$

$\text{Ln}[\frac{(x+3)}{(x-2)}] = \ln (6)$

$\frac{x+3}{x-2} = 6$

$1(x+3) = 6(x-2)$

$x+3 = 6x-12$

$x-6x = -12 - 3$

$-5x = -15$

$5x = 15$

$X = \frac{15}{5}$

$X = 3$

Verificación. X = 3 V.C.E.Ln

Ln(x+3)-ln(x-2) = ln (6)

Ln (3+3)-ln (3-2) = ln (6)

Ln (6)-ln (1) = ln (6)

Ln $(\frac{6}{1})$ = ln (6)

6 = 6 L.Q.Q.C

6. Resuelve la siguiente ecuación ln(x+5)+ln(x-4) = ln(10)

Ln(x+5)+ln(x-4) = ln(10)

Ln[(x+5)(x-4)]= ln (10)

(x+5)(x-4) = 10

$x^2+x-20-10 = 0$

$x^2+x-30 = 0$

(x+6)(x-5) =0

x+6 = 0 x-

5 = 0

x = -6 V.Inc.E.Log x

= 5 V.C.E.Log

1.5. Ecuaciones exponenciales sin y con la aplicación de logaritmos.

Ecuación exponencial. Es aquella que tiene la incógnita en el exponente, en cualquier miembro de la ecuación planteada.

Para desarrollar estas ecuaciones se recurre a las propiedades de la potenciación, radicación, de los logaritmos y cambio de la incógnita por otra.

Ejemplos desarrollados.

1. Resuelva la siguiente ecuación $3^{3x+11} = 3^{x-1}$

$3^{3x+11} = 3^{x-1}$ Simplificamos las base

$3X+11 = x-1$

$3x- x = -1-11$

$2x = -12$

$X = \frac{-12}{2}$

$X = -6$ V. C.E

Verificación.

$3^{3x+11} = 3^{x-1}$

$3^{3(-6)+11} = 3^{-6-1}$

$3^{-18+11} = 3^{-7}$

$3^{-7} = 3^{-7}$

$-7 = -7$ L. Q. Q. V

2. Desarrolla la siguiente ecuación $(3)^{-2x} * 27 = (81)^{2x-1} * (3)^{x-4}$

$(3)^{-2x} * 27 = (81)^{2x-1} * (3)^{x-4}$

$(3)^{-2x} * (3)^{3} = (3^{4})^{2x-1} * (3)^{x-4}$

$-2x + 3 = 4(2x-1) + x - 4$

$-2x + 3 = 8x - 4 + x - 4$

$-2x + 3 = 9x - 8$

$-2x - 9x = -3 - 8$

$-11x = -11$

$11x = 11$

$X = \frac{11}{11}$

X = 1 V.C.E.

Verificación.

$(3)^{-2x} * 27 = (81)^{2x-1} * (3)^{x-4}$

$(3)^{-2(1)} * (3)^{3} = (3^{4})^{2(1)-1} * (3)^{1-4}$

$(3)^{-2} * (3)^{3} = (3^{4})^{2-1} * (3)^{-3}$

$(3)^{-2+3} = (3^{4})^{1} * (3)^{-3}$

$(3)^{1} = (3^{4}) * (3)^{-3}$

$(3)^{1} = (3)^{4\ -3}$

$(3)^{1} = (3)1$

1 = 1 L.Q.Q.D

3. Desarrolla la siguiente ecuación $(5)^{2x-1} = 12$

$(5)^{2x-1} = 12$

$\text{Log } (5)^{2x-1} = \log (12)$

$(2x-1)\text{Log } (5) = \log (12)$

$2x\log 5 - \log 5 = \log (12)$

$2x \log 5 = \log 12 + \log 5$

$2x = \frac{\log 12 + \log 5}{\log 5}$

$2x = \frac{\log (12*5)}{\log 5}$

$2x = \frac{\log (60)}{\log 5}$

$2x = \frac{1.7782}{0.6990}$

$2x = 2.5439$

$X = \frac{2.5439}{2}$

X = 1.272 V.C.E

Verificación.

$(5)^{2x-1} = 12$

$(5)^{2(1.272) -1} = 12$

$(5)^{2.544 -1} = 12$

$(5)^{1.544} = 12$

12 = 12 L.Q.Q.V

3. Desarrolla la siguiente ecuación $(3)^{2x-3} =$

$\sqrt{(13)^{x}}$

$(3)^{2x-3} = (13)^{x/2}$

$\text{Log } (3)^{2x-3} = \log (13)^{x/2}$

$(2x -3) \log (3) = \frac{x}{2}\log (13)$

$2x \log(3) - 3\log(3) = \frac{x}{2}\log(13)$

$2x \log(3) - \frac{x}{2}\log(13) = 3\log(3)$

$\frac{4x\log(3) - x\log(13)}{2} = 3\log(3)$

$4x\log(3) - x\log(13) = 6\log(3)$

$X[4\log(3) - \log(13)] = 6\log(3)$

$X = \frac{6\log(3)}{4\log(3) - \log(13)}$

$X = \frac{2.8627}{1.9085 - 1.1139}$

$X = \frac{2.8627}{0.7946}$

X = 3.603 V.C.E

4. Resuelve la siguiente ecuación mediante el

cambio de variable $y = 3^x$ y aplicando logaritmos en

base binaria (base 3) $9^x + 14 = 3^{x+2}$

$9^{x} = 3^{2x}$

$9^{x} = (3^{x})^2$

$9^{x} = (y)^{2}$

$3^{x+2} = 3^{x} * 3^{2}$

$3^{x+2} = y * 9$

$3^{x+2} = 9\,y$

$y^{2} + 14 = 9y$

$y^{2} - 9y + 14 = 0$

$(y - 7)(y - 2) = 0$

$y - 7 = 0$ y

$-2 = 0$

$y = 7 \longrightarrow 3^{x} = 7$ y = $\longrightarrow$

2

$3^{x} = 2$

$3^{x} = 7$

$Log_3 (3^x) = log_3 (7)$ Log_3

$(3^x) = log_3 (2)$

$X \log_3 (3) = \log_3 (7)$ X

$\log_3 (3) = \log_3 (2)$

$X = \frac{log_3(7)}{log_3(3)}$ x =

$\frac{\log_3(2)}{log_3(3)}$

X = 1.771 V.C.E **X =**

0.631 V.C.E

5. Desarrolla la ecuación mediante el uso de

logaritmos naturales [base e, ln(x) = log $_e$ (x)]

$e^{5x+2} = 18$

$Ln (e^{5x+2}) = ln(18)$

$(5x+2) Ln\ e = ln(18)$

$(5x+2)(1) = 2.8904$

$5x+2 = 2.8904$

5x = 2.8904- 2

5x = 0.8904

X = $\frac{0.8904}{5}$

X = 0.178 V.C.E

6. Desarrolla la ecuación mediante el uso de

logaritmos naturales $e^{x^2-1} = 16^{1+x}$

$e^{x^2-1} = 16^{1+x}$

$\text{Ln}(e^{x^2-1}) = \ln(16^{1+x})$

$(x^2-1)(1) = \ln(16) + x\ln(16)$

$x^2-1 = \ln(16) + x\ln(16)$

$x^2 - x\ln(16) - 1 - \ln(16) = 0$

$x^2 - x\ln(16) + [-1 - \ln(16)] = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{\ln(16) \pm \sqrt{(-\ln(16)^2 - 4(1)(-1-ln16)}}{2(1)}$

$$x = \frac{\ln(16) \pm \sqrt{ln^2(16)+4+4\ln(16)}}{2}$$

$$x = \frac{\ln(16) \pm \sqrt{ln^2+4\ln(16)+4}}{2}$$

$$x = \frac{\ln(16) \pm \sqrt{[\ln(16)+2]^2}}{2}$$

$$x = \frac{\ln(16) \pm [\ln(16)+2]}{2}$$

$$x1 = \frac{\ln(16)+\ln(16)+2}{2}$$

$$x2 = \frac{\ln(16)-\ln(16)-2}{2}$$

$$x1 = \frac{2\ln(16)+2}{2}$$

$$x2 = \frac{-2}{2}$$

x1 = ln(16) + 1

x2 = - 1 V.C.E

x1 = 2.773 + 1

x1 = 3.773 V.Inc.E

7. Resuelva la siguiente ecuación de logaritmos naturales

Ln (x - 4) – ln(2) = Ln(4x -7) – ln(10)

Ln [$\frac{x-4}{2}$] = Ln [$\frac{4x-7}{10}$]

$\frac{x-4}{2}$ = $\frac{4x-7}{10}$

10 (x -4) = 2(4x-7)

10 x - 40 = 8x-14

10 x - 8x = -14 + 40

2 x = 26

X = $\frac{26}{2}$

X = 13

Verificación.

Ln (x - 4) – ln(2) = Ln(4x -7) – ln(10)

Ln (13 - 4) – ln(2) = Ln[4(13) -7] – ln(10)

Ln (9) – ln(2) = Ln[52 -7] – ln(10)

Ln (9/2) = Ln[45] – ln(10)

Ln (9/2) = Ln[$\frac{45}{10}$]

Ln (9/2) = Ln ($\frac{9}{2}$) L.Q.Q.C

$\frac{9}{2}$ = $\frac{9}{2}$ L.Q.Q.D

1.6. Ejercicios y problemas propuestos del capítulo.

Determine los siguientes logaritmos

1. $\text{Log}_4 256$ =
2. $\text{Log}_2 32$ =
3. $\text{Log}_{27} 81$ =
4. $\text{Log}_{16} 8$ =
5. $\text{Log}_9 243$ =
6. $\text{Log}_6 1296$ =
7. $\text{Log}_8 32768$ =
8. $\text{Log}_2 0.0625$
9. $\text{Log}_5 0.008$ =
10. $\text{Ln}_e \sqrt[3]{e}$ =
11. $\text{Ln}\sqrt[4]{e^5}$ =
12. $\text{Ln}\sqrt[7]{e^4}$ =

13. $Ln_e \frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ =

Exprese en forma exponencial a los siguientes

logaritmos.

1. $Log_3\ 2187 = 7$ 2. $Log_2\ 512 = 9$ 3. Log_8

$2 = 1/3$ 4. $Log_{64}\ 256 = \frac{4}{3}$

5. $Log_{(5/2)} (\frac{625}{16}) = 4$ 6. $Log_{(3/2)} (\frac{8}{27}) = -3$ 7. Log

$_2\ 0.0625 = -4$ 8. $Log_5\ 0.0016 = -4$

9. $Ln_e (e)^6 = 6$ 10. $Ln_e\ e^{1/4} = 1/4$ 11. Ln

$e^{-3/5} = -3/5$ 12. $Ln_e\ e^{-2/3} = -2/3$

Aplique las propiedades de los logaritmos para

desarrollar los siguientes ejercicios.

1. Log [(259)(1234)(172)] = 2. $Log [(\frac{253}{78})]$ =

3. $Log [\frac{(248)(890)}{(24)^3}]$ = 4. $Log [\frac{(298)(2567)}{\sqrt{37}}]$

5. Log [(159)(294)($\sqrt{114}$)] = 6. Log [$\frac{(253)(27)}{8^2}$] = 7.

Log [$\frac{(348)(\sqrt{363})(566)}{(\sqrt[5]{(39)}^3}$] = 8. Log [$\frac{(98)(\sqrt[5]{(2)^3}}{\sqrt{17}}$]

9. Log [(2159)(94)($\sqrt{34}$)/$\sqrt[3]{(16)^5}$] = 10. Log

[$\frac{(53)(257)(\sqrt[7]{(4)^3}}{(4)^2}$] = 11. Log [$\frac{(348)(\sqrt[4]{(5)^3}(1566)}{(\sqrt[5]{(39)})}$]

Escribe a cada ejemplo mediante un solo logaritmo

(caso inverso de la Propiedades)

1. Log (689)+log (24)-log (57) = 2. Log

(24)+log (578)-1/2*log (6) –log (278)=

3. Log (1619)+log (124)- 1/3*log (57)-log (13) = 4.

Log (94)+log (478)-3/4log (7) –log (8)

5. 4/3*log (67)+ 5/3*log (57)-log (13)-1/4log (5) =

6. 2/5*Log (9)+log (478)-3/4log (37)

7. 4/3[log (47)+ 2/3*log (17) -5/4log (15)] = 8.

2/5[Log (18)+log (4782)-3/4log (57)

Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas y ecuaciones logarítmicas naturales o Neperianas.

1. Log (4x+3) + log (16) = Log (x+2) – log(7)
2. Log(x+4)+log(2x+5)=log(8)
3. Log (3x-4) + log (x+5) = Log (2x+6)
4. Log(2x+4)+log(5)=log(100)
5. Log (5x-2) – log (x+2) = log (12)
6. Log (2x+7)+log(x-3)=log(x+8)+log(x+2)
7. Log (4x-1) + Log (2x+3) = Log ($8x^2$- 4x+5)
8. Log (4x-6) + log (2x+5) = log (3x-12)
9. Log (x+5) + log (x+4) – Log (8) = log (3x-2)
10. Log (5x-2) = log (x+4) + log (x-6)
11. Log (x)+ log (2x+6) = log (5x-3) – log (11)
12. log(x+2)-log(x-1) = log (2x-5)- log (24)
13. Ln(x+3) +ln (2x+1) = Ln (3x+5)
14. Ln(4x-3)-ln(x+2)=ln(x-6)
15. Ln (12) + ln (3x+4) = Ln (x+2) – ln (9)
16. Ln (2x+7) +ln(x+9) = ln (12)

17. Ln (4x-1) – Ln (x-2) = 2Ln (3) – 3ln (2)

18. Ln (2x+3) + 2ln (3x-1)=ln(x+4)

19. 2Ln (2x+5) = 3ln (1)

20. Ln(x-6) +ln (3x+7) =ln (100)

21. Ln (x+2) – ln (15) = ln (2x+7)

22. Ln (5x-1)+ln (2x-4)=ln(x-2)-ln(2x+6)

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales

sin y con logaritmos.

1. $3^{4x-1}(9) = 81^{2x}$

2. $2^{x+3} * (\frac{1}{2})^{3+2x} = 4(2^{x})$

3. $(25)^{2x}(\frac{1}{5})^{x+2} = 125(5^{-2x})$

4. $(9)^{x-3} = (27)^{4-2x}$

5. $3^{2x}(1/3)^{4-2x} = 27(3^{2x})$

6. $5^{2x+3} = 3^{3-x}$

7. $5^{x}(3^{3x}) = 9$

8. $3^{2x+3} = 5^{3-x}$

9. $5^{3x} = 15\ (3)^{-2x+1}$

10. $3^{x} = 12(2^{2x})$

11. $6^{2^x} + 6^{2^x-3} = 3^{2^x}$

12. $7^{2^x} + 7^{3^x-2} = 6(7^{3^x})$

Resuelve las siguientes ecuación mediante el

cambio de variable y $=a^x$ y aplicando logaritmos

1. $25^x + \frac{1}{62500} = 5^{x-3,}$ en base binaria (base 5)

2. $4^x + 4 = 2^{x+2,}$ en base binaria (base 2)

3. $36^x + 324 = 6^{x+2,}$ en base binaria (base 6)

1.7. Actividades de refuerzo del capítulo.

1. Lea detenidamente los enunciados y coloque dentro de los paréntesis una v si es verdadero o una f si es falso; lo que se dice.

* El logaritmo de base 10 se simboliza por log o $\log_{10}$

( )

* Los logaritmos Neperianos o naturales se simbolizan por Lnu ( )

* El logaritmo numérico es el exponente x al que se eleva una base b para tener un número ( )

* El logaritmo de base cuatro de sesenta y cuatro es 4 ( )

* El logaritmo natural de e es igual a uno ( )

2. Completa a los siguientes enunciados para que tengan sentido completo.

* El logaritmo de un producto es igual a la adición de cada uno de los…………………………………………….

* El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el…………………………..y………………………….

* El logaritmo de una potencia es igual al producto del………………………por el…………………………………..

* El logaritmo de la raíz enésima es igual al logaritmo del………………………entre el índice de la …………

* El logaritmo de un numero negativo

es…………………………………su……………………………………….

………..

* El logaritmo de cero

no……………………………………………………………………………

……………………………….

* El logaritmo natural de e es igual

a……………………………………………………………………………

……………

* Existen tres tipos de ecuaciones en los logaritmos:

ecuaciones logarítmicas, ecuaciones logarítmicas

naturales o Neperianas y

ecuaciones……………………………………………………………

…………..

3. Completa el cálculo de los siguientes logaritmos.

1. $\text{Log}_{8} 512 =$ 2. $\text{Log}_{5} \quad = 6$

3. $\text{Log}_{100} 10 =$

4. Log 243 = 5

5. Log $_7$ = 3

6. Log $_{121}$ 11 =

4. Completa el cálculo de las siguientes ecuaciones.

1. Log (x+ 6)+log (4) = log (3x+26)

Log[4(x+ 6) = log (3x+26)

X = 2. V.C.E

Verificación.

Log (x+ 6)+log (4) = log (3x+26)

Log (2+ 6)+log (4) = log [3(2)+26]

32 = 32 L.Q.Q.D

2. Ln (2x-1) – ln (3) = Ln (5x + 4) – ln (8)

Ln (2x-1) – ln (3) = Ln (5x + 4) – ln (8)

$Ln\ (\frac{2x-1}{3})$ = ln ($\frac{5x+4}{8}$)

x = 20

Verificación.

Ln (2x-1) – ln (3) = Ln (5x + 4) – ln (8)

Ln [2 (20)-1] – ln (3) = Ln [5 (20) + 4] – ln (8)

$\text{Ln}\,[40 - 1] - \ln(3) = \text{Ln}\,[100 + 4\,] - \ln(8)$

13 =13 L.Q.Q.V

CAPÍTULO. 2.

2.1. Introducción a las funciones. ¿Lo siguiente define una función?

a. La regla que asigna, a cada estudiante la computadora que le corresponde en el laboratorio de cómputo.
b. La regla que asigna, a cada persona con su número de cedula de ciudadanía.
c. Un diccionario español – Ingles.
d. La regla que asigna, a cada persona con su correspondiente edad (años)

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en cálculo diferencial, casi cualquier estudio que se refiere a la aplicación del cálculo y problemas prácticos o que se requiera del análisis de datos empíricos emplea este concepto de función. Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra. Los ejemplos siguientes aclaran esta idea.

1. El área de un cuadrado depende de la longitud del lado, si se conoce la longitud del lado, podemos determinar el área. Decimos que el área del cuadrado es una función de la longitud del lado.
2. El costo mensual de producir camisas y pantalones depende del número de prendas de vestir. Decimos que el costo mensual de producción de camisas y pantalones es una función del número de prendas de vestir.
3. La cantidad de cierto producto agrícola que el trabajador ofrecerá depende del precio que pueda lograr. La cantidad del producto agrícola es una función del precio.

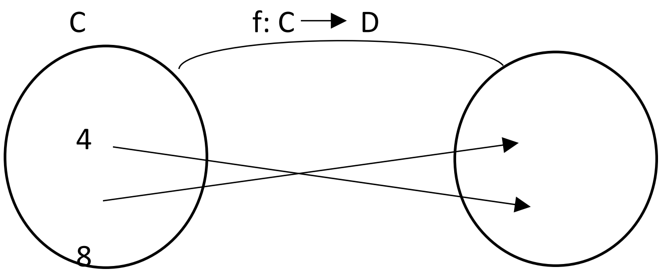
2.2. Definiciones de una función.

a) Una función entre dos conjuntos numéricos es una correspondencia en la que a cada número del primer conjunto le corresponde una sola imagen del segundo conjunto.

b) Llamamos función f del conjunto C en el conjunto D a una relación de dependencia en la que a cada elemento x de C le corresponde un único elemento y de D.

Ejemplos desarrollados.

1. Sea la función f de C en D “doble de”



D

4

2

10

5

Domf(x)

Rangf(x)

f = {(4, 2) ;(8, 4) ;(10, 5)}

2. Sea la función g de A en B " es capital de"

A g: A $\longrightarrow$ B

B

Loja

Cuenca

Azuay

Loja

Carchi

Tulcán

Dom.g(x)

Rang.g(x)

g = {(Loja, Loja) ;(Azuay, Cuenca) ;(Carchi, Tulcán)}

2.3. Evaluación de una función dado un valor o valor funcional.

Consiste en reemplazar el valor dado de x, sustituyéndolo ese valor en la variable o variables de la función dada, luego se opera hasta determinar el valor de f(x) o valor de y, que llevado a un par ordenado es el valor de la segunda componente.

Ejemplos desarrollados.

1. Calcule f(2), f(-3), f($\frac{1}{2}$), f($\frac{-2}{3}$) en f(x)= $2x^3+\frac{3}{2}x^2-5x+\frac{5}{4}$

F (2)= $2x^3+\frac{3}{2}x^2-5x+\frac{5}{4}$

F (2)= $2(2)^3+\frac{3}{2}(2)^2-5\ (2)+\frac{5}{4}$

F (2)=$2(8)+\ \frac{3}{2}(4)\ -10+\frac{5}{4}$

F (2)=$16+6-10+\frac{5}{4}$

F (2)=$12+\frac{5}{4}$

F (2)=$\frac{48+5}{4}$

F (2)= $\frac{53}{4}$ **Rta. Número racional o F (2)=$13\frac{1}{4}$**

Rta Número mixto

F (2)=13.25 Rta. Número decimal.

F (-3)= $2x^3+\frac{3}{2}x^2-5x+\frac{5}{4}$

F (-3)= $2(-3)^3+\frac{3}{2}(-3)^2-5\ (-3)+\frac{5}{4}$

F (-3)= $2(-27)+\frac{3}{2}(9)+(15)+\frac{5}{4}$

F (-3)= $-54+\frac{27}{2}+15+\frac{5}{4}$

F (-3)= $-39+\frac{27}{2}+\frac{5}{4}$

F (-3)= $\frac{-156+54+5}{4}$

F (-3)= $\frac{-97}{4}$ Rta.

$$\mathbf{F\left(\frac{1}{2}\right)= 2x^3+\frac{3}{2}x^2-5x+\frac{5}{4}}$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{4}$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)= 2/8+\frac{3}{8}-\frac{5}{2}+\frac{5}{4}$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)= \frac{5}{8}-\frac{5}{2}+\frac{5}{4}$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)= \frac{5-20+10}{8}$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)= \frac{-5}{8}\ \text{Rta.}$$

$$\mathbf{F\left(\frac{-2}{3}\right)= 2x^3+\frac{3}{2}x^2-5x+\frac{5}{4}}$$

$$F\left(\frac{-2}{3}\right)= 2\left(\frac{-2}{3}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{-2}{3}\right)^2-5\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{5}{4}$$

$$F\left(\frac{-2}{3}\right)= 2\left(-\frac{8}{27}\right)+\left(\frac{12}{18}\right)+\frac{10}{3}+\frac{5}{4}$$

$$F\left(\frac{-2}{3}\right)= \frac{-16}{27}+\frac{2}{3}+\frac{10}{3}+\frac{5}{4} = -16/27 + 4 + 5/4$$

$$F\left(\frac{-2}{3}\right)= \frac{-64+432+135}{108}$$

$$F\left(\frac{-2}{3}\right)= \frac{503}{108}\ \text{Rta.}$$

2.- Determine f $\left(\frac{2}{3}\right)$; f $\left(\frac{5}{2}\right)$; f(-2) en f(x)= $\frac{5}{2}x^3 - 7x^2$

$+ \frac{1}{2}x - \frac{5}{3}$

$$\mathbf{F\left(\frac{2}{3}\right)= \frac{5}{2}x^3 - 7x^2 + \frac{1}{2}\, x - \frac{5}{3}}$$

$$F\left(\frac{2}{3}\right)= \frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3-7\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{3}$$

$$F\left(\frac{2}{3}\right)= \frac{5}{2}\left(\frac{8}{27}\right) -7\left(\frac{4}{9}\right) +\frac{2}{6} - \frac{5}{3}$$

$$F\left(\frac{2}{3}\right)= \frac{40}{54} - \frac{28}{9} +\frac{1}{3} - \frac{5}{3} = 20/27 - 28/9 - 4/3$$

$$F(2/3) = \frac{20-84-36}{27}$$

$$F(2/3) = \frac{-100}{27} \text{ Rta.}$$

$$\mathbf{F\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}x^3-7x^2+\frac{1}{2}\, x-\frac{5}{3}}$$

$$F\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^3-7\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{3}$$

$$F\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{125}{8}\right)-7\left(\frac{25}{4}\right)+ \frac{5}{4} - \frac{5}{3}$$

$$F\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{625}{16} - \frac{175}{4} + \frac{5}{4} - \frac{5}{3}$$

$$F\left(\frac{5}{2}\right) = 625/16 - 170/4 - 5/3$$

$$F\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1875-2040-80}{48}$$

$$F\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{245}{48} \text{ Rta}$$

$$F\left(\frac{5}{2}\right) = -5\ \frac{5}{48} \text{ Rta.}$$

$$F\left(\frac{5}{2}\right) = -5.104 \text{ Rta.}$$

$$\mathbf{F(-2)= \frac{5}{2}x^3-7x^2+\frac{1}{2}\, x-\frac{5}{3}}$$

F (-2)= $\frac{5}{2}$(-2)³-7(-2)²+$\frac{1}{2}$ (-2)- $\frac{5}{3}$

F (-2)= $\frac{5}{2}$(-8)-7(4)+$\frac{1}{2}$ (-2)- $\frac{5}{3}$

F(-2) = -20 -28 -1 – 5/3

F(-2) = -49 -5/3

F(-2)= (-147-5)/3

F(-2)= -152/3 Rta.

3.- Determine f(x+h)-f(x-h) en f(x) =($\frac{5}{x}$)

f(x) = $\frac{5}{x}$

f [f(x+h)-f(x-h)]=$\frac{5}{(x+h}$ - $\frac{5}{(x-h)}$

f [f(x+h)-f(x-h)]=$\frac{5(x-h)-5(x+h)}{(x+h)(x-h)}$

f [f(x+h)-f(x-h)]=$\frac{5x-5h-5x-5h}{(x+h)(x-h)}$

f [f(x+h)-f(x-h)]=$\frac{-10h}{(x+h)(x-h)}$

4.- Determine f(x+h)-f(x) en F(x)= $\frac{2}{x}$

F(x) =$\frac{2}{x}$

F [f(x+h)-f(x)]=$\frac{2}{(x+h)}$ - $\frac{2}{x}$

F [f(x+h)-f(x)]=$\frac{2x-2(x+h)}{x(x+h)}$

F [f(x+h)-f(x-h)]=$\frac{2x-2x+2h}{x(x+h)}$

F [f(x+h)-f(x-h)]=$\frac{2h}{x(x+h)}$

5. $\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$ en G $(x) = \sqrt[2]{2x^2+1}$

G [G$\frac{(x+h)-G(x)}{h}$]= $\frac{\sqrt[2]{2(x+h)^2+1}-\sqrt[2]{2x^2+1}}{h}$

G [G$\frac{(x+h)-G(x)}{h}$] $=$

$\frac{(\sqrt[2]{2(x+h)^2+1} - \sqrt[2]{2x^2+1})}{h(\sqrt[2]{2(x+h)^2+1}+ \sqrt[2]{2x^2+1}}$ $(\sqrt[2]{2(x+h)^2+1} +$

$\sqrt[2]{2x^2+1}$

$$= \frac{\left(\sqrt{2(x+h)^2}+1\right)^2 - (\sqrt{2x^2}+1)^2}{h(\sqrt{2(x+h)^2+1}+ \sqrt{2x^2+1})}$$

$$\frac{2(x^2+2xh+h^2)+1-(2x^2+1)}{h(\sqrt{2(x+h)^2+1}+ \sqrt{2x^2+1})}$$

$$\frac{2x^2+4xh+2h^2+1-2x^2-1}{h(\sqrt{2(x+h)^2+1}+ \sqrt{2x^2+1})}$$

$$\frac{2h(2x+h)}{h(\sqrt{2(x+h)^2+1}+\sqrt{2x^2+1})}$$

6.- Determine [f(x+h)-f(x)]/h en f(x)= $2x^2-3x+5$

F [(x+h)-f(x)]/h= $\frac{[2(x+h)^2-3(x+h)+5]-(2x^2-3x+5)}{h}$

$$=\frac{2x^2+4xh+2h^2-3x-3h+5-2x^2+3x+5}{h}$$

$$=\frac{4xh+2h^2-3h}{h}$$

$$=\frac{h(4x+2h-3)}{h}$$

$$=4x+2h-3$$

2.4. El dominio de una función [Dom f(x)]. Es el conjunto de todos los elementos o valores independientes posibles obtenidos, de acuerdo a la condición dada, es decir es la reunión de todas las entradas posibles

El rango de una función [Rang f(x) o Imag f(x)]. Es el conjunto de todos los elementos dependientes posibles; que pueden producirse y que cumplen con la condición dada, es decir es la agrupación de todas las salidas posibles.

Nota. El dominio y el rango de una función están normalmente limitados por la naturaleza de la relación (condición). La manera más efectiva para determinar el rango sin errores, consiste en graficar la función y ver los valores que toma Y de abajo hacia arriba o viceversa o también se puede proyectar la gráfica obtenida al eje de las coordenadas.

Ejemplos desarrollados.

1. Dados los conjuntos X = {-2, -1, 0, 1, 2} y Y = {x/x ϵ Z}, determinemos simbólica y gráficamente la función $f: X \to Y$, dada por la ecuación "y = x+3". Finalmente anotemos el dominio y la imagen.

Generalmente primero elaboramos una tabla con

los datos de la función dada.

X	x+3 = y
-2	-2+3=1
-1	-1+3=2
0	0+3=3
1	1+3=4
2	2+3=5

Forma simbólica.

Forma gráfica.

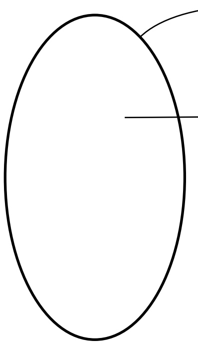
f = {(-2,1);(-1,2);(0,3);(1,4);(2,5)}

X y=x+3 Y

Dom.f(x) = {-2, -1, 0, 1, 2}

-2 f

1



Img.f(x) = {1, 2, 3, 4, 5}

-1 2

0

1

2

Domf(x) Rangf(x)

2. Dados los conjuntos X = {-2, -1, 0, 1, 2} y Y = {x/x ϵ Z}, determinemos simbólica y gráficamente la función f: X $\rightarrow$ Y, dada por la ecuación "$y = 2x^2+3x-2$". Finalmente escribamos el dominio y la imagen.

X	$2x^2$ + 3x - 2 = y
-2	$2(-2)^2+3(-2)-2 = 8-6-2 = 0$
-1	$2(-1)^2+3(-1)-2 = 2-3-2= -3$
0	$2(0)^2+3(0)-2 = 0+0- 2= -2$
1	$2(1)^2+3(1)-2 = 2+3-2 = 3$
2	$2(2)^2+3(2)-2 = 8+6-2 = 12$

Dom.f(x)	Imag.f(x)

Forma simbólica.

Forma gráfica.

f = {(-2,0);(-1,-3);(0,-2);(1,3);(2,12)}

X $y=2x^2+3x-2$ Y

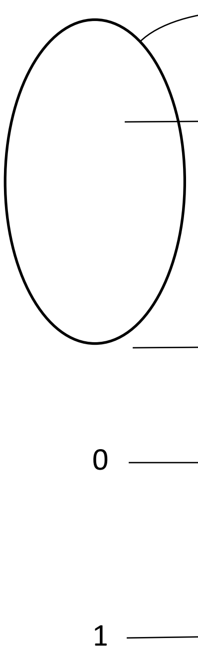
Dom.f(x) = {-2, -1, 0, 1, 2}

-2   f

0

Img.f(x) = {0, -3, -2, 3, 12}

-1   -3



2

Domf(x) Rangf(x)

2.5. Grafica de una función en un sistema cartesiano.

Lo primero que debemos hacer es una tabla de valores, luego representar en el plano cartesiano los pares ordenados obtenidos en la función.

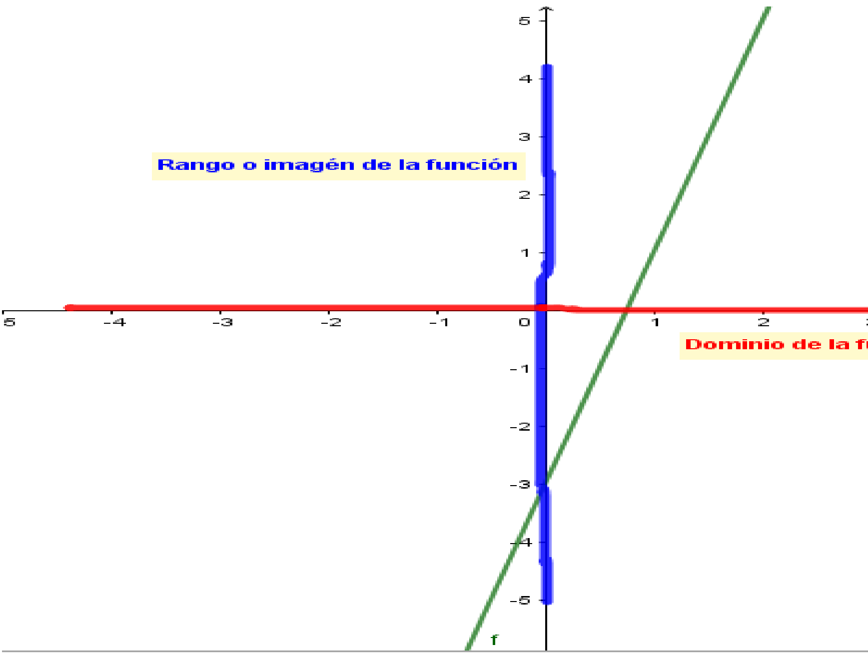
Tomar en cuenta que:

f= {(x, y)/y=f(x) Λ x, y ϵ R}

Ejemplos desarrollados.

1. Determina la gráfica, dominio y rango de la siguiente función, f(x) = 4x-3

Gráfica de la función.



Proceso analítico del dominio y rango de la función.

X	4x - 3 = y

…	…
-2	4(-2)-3=-8-3 = -11
-1	4(-1)-3=-4-3 = -7
0	4(0)-3= 0-3 = -3
1	4(1)-3=4-3 = 1
2	4(2)-3=8-3 = 5
… Dom.	… Rang. f(x)

f = {…,(-2,-11);(-1,-7);(0,-3);(1,1);(2,5),…}

Dom.f = {…, -2, -1, 0, 1, 2,…}

Dom.f = R

Dom.f = (- ∞, ∞)

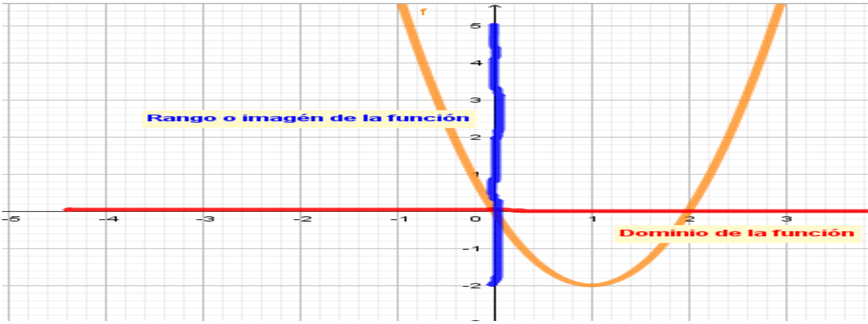
Rang.f(x) = {…, -11, -7, -3, 1, 5, …}

Rang.f(x) = R

Rang.f(x) =]- ∞, ∞ [

2. Determina la gráfica, dominio y rango de la siguiente función, $f(x) = 2x^2-4x$

Gráfica de la función.



Proceso analítico del dominio y rango de la función.

X	$2x^2$ - 4x = y
…	…
-2	$2(-2)^2-4(-2) = 8+8 = 16$

-1	$2(-1)^2-4(-1) = 2+4 = 6$
0	$2(0)^2-4(0) = 0+0 = 0$
1	$2(1)^2-4(1) = 2-4 = -2$
2	$2(2)^2-4(2) = 8-8 = 0$
… Dom.	… Rang. f(x)

f = {…,(-2, 16);(-1,6);(0,0);(1,-2);(2,0),…}

Dom.f = {…, -2, -1, 0, 1, 2,…}

Dom.f = R

Dom.f = (- ∞, ∞)

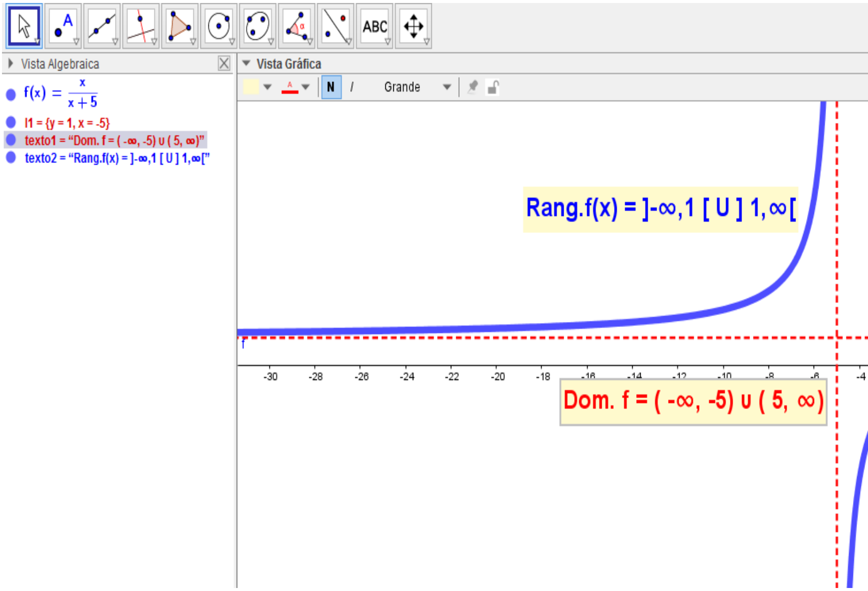
Rang.f(x) = { …, 16, 6, 0, -2, 0, …}

Rang.f(x) = [- 2, ∞   [

3. Determina la gráfica, dominio y rango de la

siguiente función, f(x) = x/x+5.

Gráfica de la función.



Proceso analítico del dominio y rango de la función.

Dominio de la función.

$X+5=0$ o $X+5 \neq 0$

$x=-5$ o $x\neq -5$

Dom $f(x)=R-\{-5\}$

Dom = $\{X\in R/x\neq-5\}$

Dom $f(x)= (-\infty,-5)U(-5,+\infty)$

Rango de la función.

$y=x/x+5$

$y(x+5)=x$

$Xy+5y=x$

$Xy-x=-5y$

$X (y-1)=-5y$

$x=-5y/y-1$

$y-1=0$ $y-1\neq0$

$y=1$ $y\neq1$

Rango $f(x)= R-\{1\}$

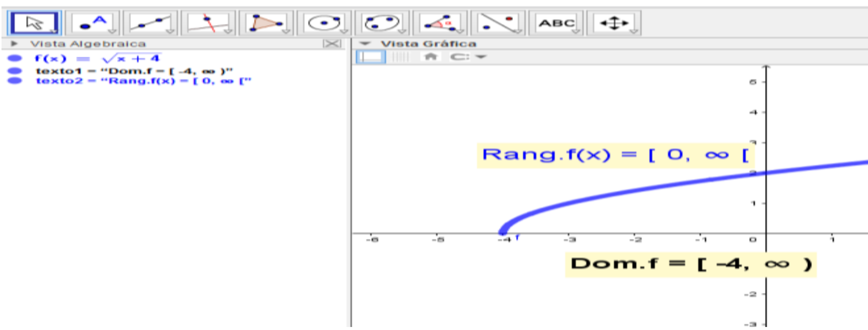
Rango f(x)= {Y∈R/y≠1}

Rango f(x)= (-∞,1) u (1, ∞)

4. Determina la gráfica, dominio y rango de la

siguiente función, f(x) = $\sqrt{x+4}$

Gráfica de la función.



Proceso analítico del dominio y rango de la función.

Dominio de la función.

x+4≥0

X≥-4

Dom f(x)=R-{-4}

Dom = {x∈R/x≥-4}

Dom f(x) = [-4,+∞)

Rango de la función.

y= $\sqrt{x+4}$

$(y)^2= (\sqrt{x+4})^2$

$y^2=x+4$

$X+4=y^2$

/ $x=y^2-4$//

$y^2 - 4\geq x$

$y^2 -4\geq-4$

$y^2 \geq -4+4$

$y^2 \geq 0$

$y\geq\sqrt{0}$

$y\geq0$

Rango f(x)= R≥0

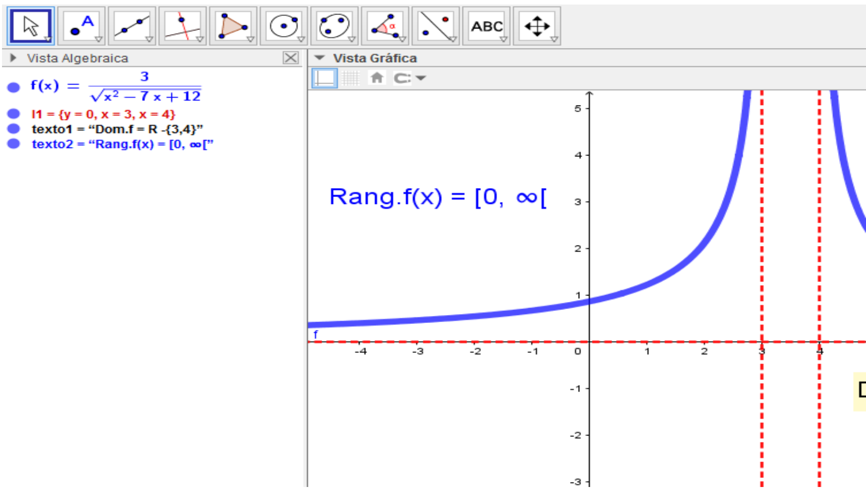
Rango f(x)= {Y∈R/y≥0}

Rango f(x)= [0, ∞)

5. Determina la gráfica, dominio y rango de la

siguiente función, f(x) = 3/ $\sqrt{x^2-7x+12}$

Gráfica de la función.



Proceso analítico del dominio y rango de la función.

Dominio de la función.

x^2-7x+12≥0

$(x-4)(x-3)\geq 0$

$x-4\geq 0$ $x-3\geq 0$

$x\geq 4$ $x\geq 3$

Dom $f(x)=R-\{3,4\}$

Dom = $\{x\in R / 3\leq x\leq 4\}$

Dom $f(x) = (-\infty,3] \cup [4,\infty)$

Rango de la función.

$f(x) = 3/\sqrt{x^2-7x+12}$

$y = 3/\sqrt{x^2-7x+12}$

$(y)^2 = (3/\sqrt{x^2-7x+12})^2$

$y^2 \geq (9/x^2-7x+12)$. Se toma el denominador

$y^2 \geq x^2-7x+12$

$x^2-7x+12 \geq y^2$

$x^2-7x+12- y^2 \geq 0$

x ≥ -b±$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

x ≥ 7±$\frac{\sqrt{(-7)^2-4(1)(12-y^2)}}{2(1)}$

x ≥ 7±$\frac{\sqrt{49-48+4y^2)}}{2}$

(3)(2) ≥ 7±$\sqrt{1 + 4y^2}$

6-7 ≥ ±$\sqrt{1 + 4y^2}$

$(-1)^2$ ≥ (±$\sqrt{1 + 4y^2}$)^2

1 ≥ $1+4y^2$

$1+4y^2$ ≥ 1

$4y^2$ ≥ 1 - 1

$4y^2$ ≥ 0

y^2 ≥ 0/4

$y^2 \geq 0$

$y \geq \pm\sqrt{0}$

$y \geq 0$

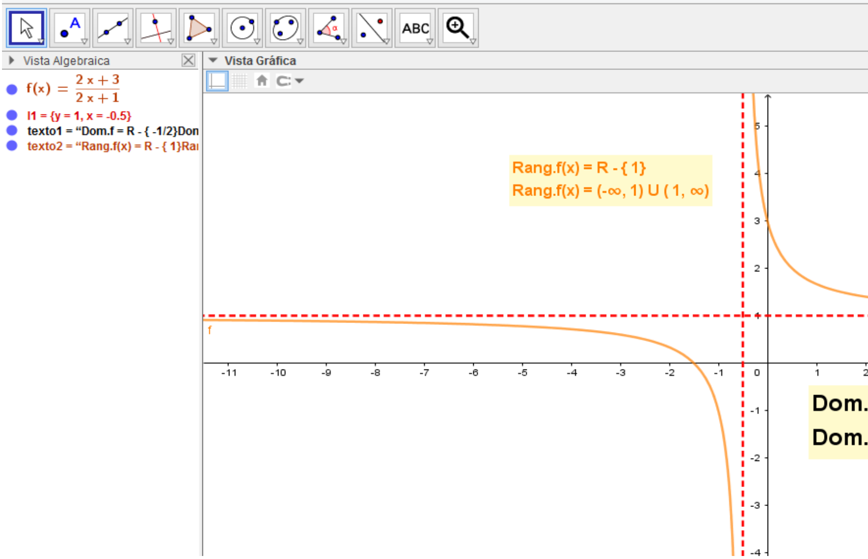
Rango f(x)= $R \geq 0$

Rango f(x)= $\{Y \in R / y \geq 0\}$

Rango f(x)= $[0, \infty)$

6. Determina la gráfica, dominio y rango de la siguiente función, f(x) = 2x+3/2x+1.

Gráfica de la función.



Proceso analítico del dominio y rango de la función.

Dominio de la función.

2X+1=0 o 2X+1 ≠ 0

x=-1/2 o x≠ -1/2

Dom f(x)=R-{-1/2}

Dom = {X∈R/x≠-1/2}

Dom f(x)= (-∞,-1/2) U (-1/2,+∞)

Rango de la función.

f(x) = $\frac{2x+3}{2x+1}$

y = $\frac{2x+3}{2x+1}$

y(2x+1)= 2x+3

2xy+y= 2x+3

2xy-2x=3-y

X (2y-2)=3-y

X =$\frac{3-y}{2y-2}$

2y-2=0 2y-2≠0

y= $\frac{2}{2}$ y≠ $\frac{2}{2}$

y = 1 y≠1

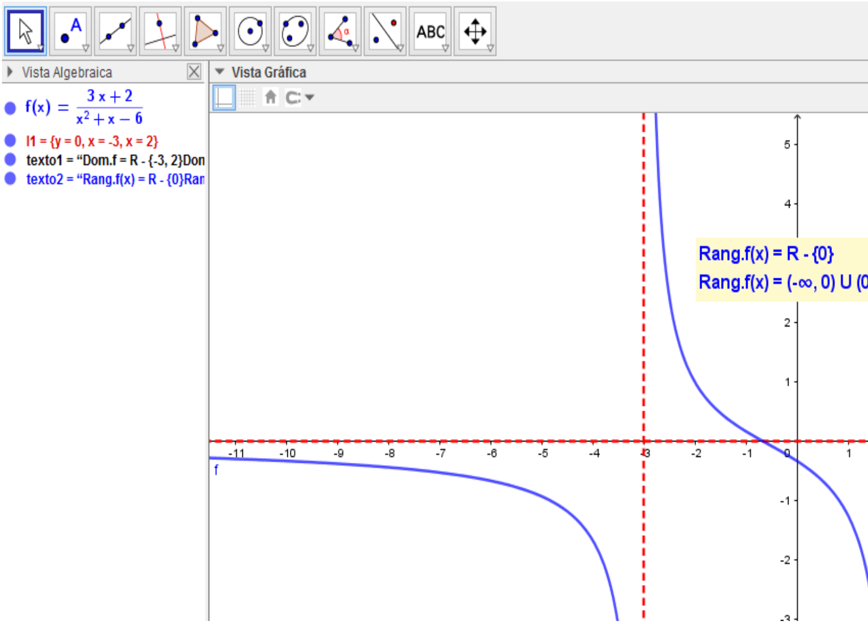
Rango f(x)= R-{1}

Rango f(x)= {Y∈R/y≠1}

Rango f(x)= (-∞,1) u (1, ∞)

7. Determina la gráfica, dominio y rango de la

siguiente función, $f(x) = 3x+2/x^2+x-6$.



Proceso analítico del dominio y rango de la función.

Dominio de la función.

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

X+3=0 x-2=0

X= -3 x= 2

Dom.f = R- {-3, 2}

Dom.f = (-∞, -3) U (-3,2) U (2, ∞)

Rango de la función.

f(x) = $\frac{3x+2}{x^2+x-6}$

y = $\frac{3x+2}{x^2+x-6}$

Y(x^2+x-6) = 3x+2

x^2y+xy-6y = 3x+2

x^2y+xy-6y -3x-2=0

x^2y+x(y-3)-(6y +2)=0

x = -b±$\frac{\sqrt{b^2-4ac)}}{2a}$

x= -(y-3) ± $\frac{\sqrt{(y-3)^2-4y(-6y-2)}}{2y}$ reemplazando x=2

2(2y) = -y+3 ±$\sqrt{y^2-6y+9+24y^2+8y}$

4y+y-3 = ±$\sqrt{25y^2+2y+9}$ Elevando al cuadrado

ambos miembros

(5y-3)²= (±$\sqrt{25y^2+2y+9}$)²

25y²-30y+9 = 25y²+2y+9

25y²-30y+9-25y²-2y-9 = 0

-32y = 0

Y = $\frac{0}{-32}$

Y = 0

y≠ 0

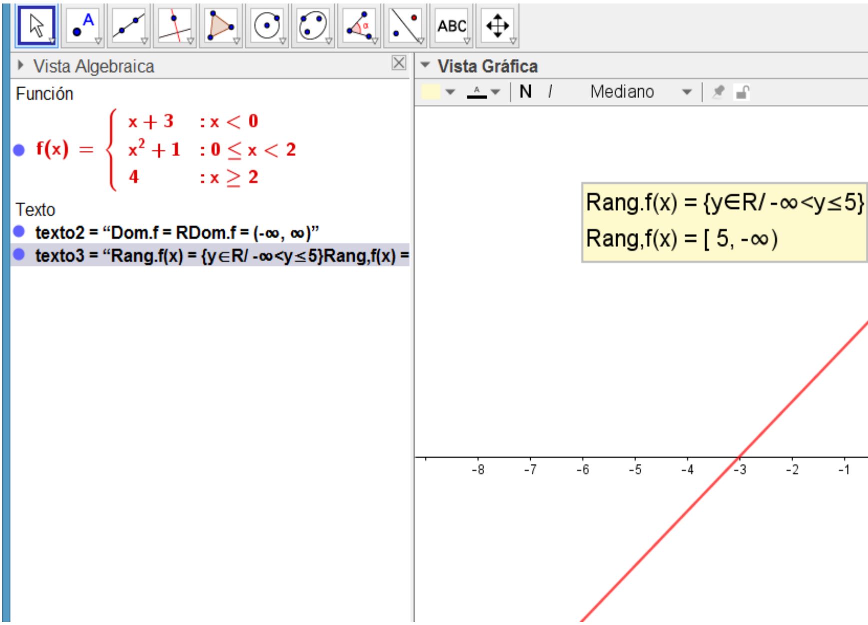
Rang.f(x) = R – { 0 }

Rang.f(x) =]-∞, 0[U]0,∞[

8. Determina la gráfica, dominio y rango de la

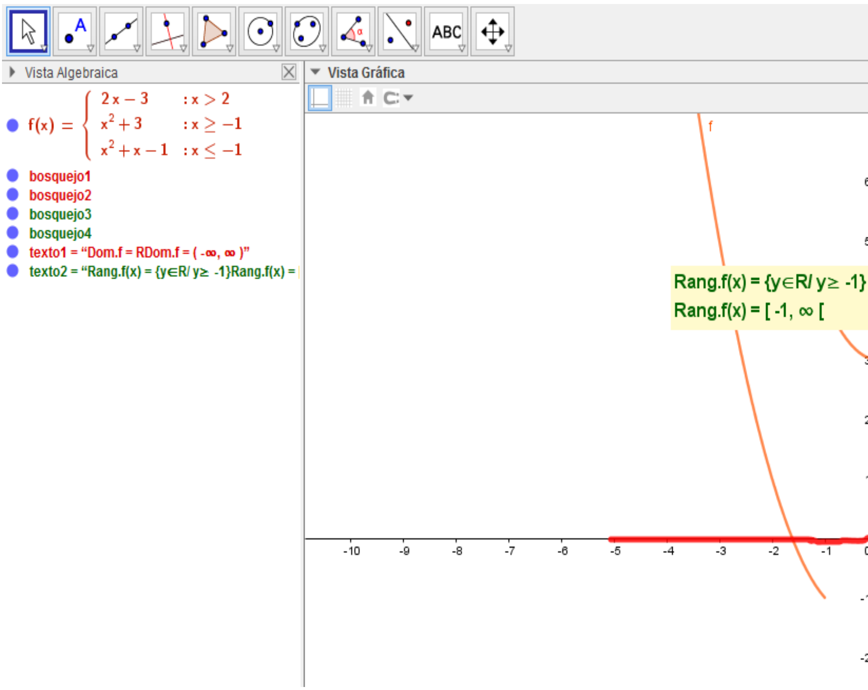
siguiente función.

$$f(x)\begin{cases} x+3 & : x<0 \\ x^2+1 & : 0\leq x<2 \\ 4 & : x\geq 2 \end{cases}$$



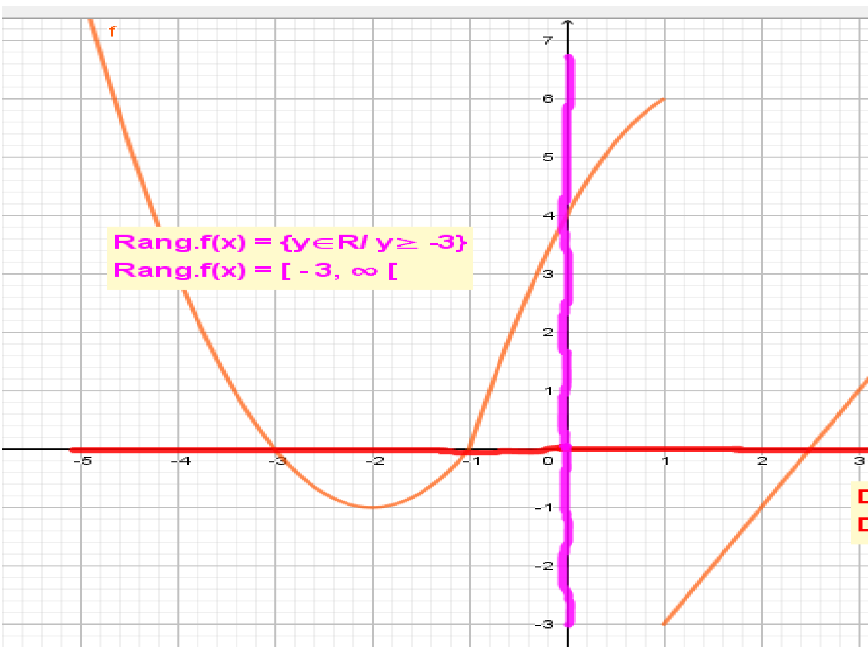
9. Determina la gráfica, dominio y rango de la siguiente función.

$$f(x) \begin{cases} 2x-3 & : x>2 \\ x^2+3 & : x\geq -1 \\ x^2+x-1 & : x\leq -1 \end{cases}$$



10. Determina la gráfica, dominio y rango de la siguiente función.

$$f(x)\begin{cases} 2x-5 & : x>1 \\ -x^2+3x+4 & : -1<x\leq 3 \\ x^2+4x+3 & : x<-1 \end{cases}$$



2.6. Ejercicios y problemas propuestos del capítulo.

En los siguientes ejercicios planteados; determine la evaluación solicitada en la función dada.

1. f(x) = 2x+7; f($\frac{3}{4}$); f($\frac{-5}{3}$) y f($\frac{-2}{3}$)
2. f(x) = 4x-3; f (2); f($\frac{-4}{7}$) y f($\frac{1}{2}$)
3. g(x) = $2x^3 + 4x^2 - 7x + 3$; g(2); g(-4/3) y g(5/2)
4. h(x) = $x^3 - 6x^2$; h(4) y h($\frac{-1}{2}$)
5. f(x) = $\frac{2x^2-3x+5}{2x+1}$; f($\frac{-1}{2}$), f(-2); f($3\frac{3}{2}$) y f($\frac{3}{5}$)
6. f(x) = $\frac{2x^2-4x+1}{4x-3}$; f(3) y f($\frac{-4}{3}$)
7. f(x) = $\frac{3x^3+2x-4}{x^2+4}$; f(-1); f(-2/3); f($2\frac{1}{2}$) y f($\frac{6}{5}$)
8. h(x) = $\frac{2x^2-3x+3}{2x^2+x-4}$; h(1) y h($\frac{-3}{5}$)
9. h(x) = $\frac{3x^3-2x^2+4x-5}{2x^2-4x+3}$; h(-1), h(5) y h($\frac{-3}{2}$)
10. h(x) = $\frac{x^2+3x}{x-4}$; h(-2) y h($1\frac{1}{2}$)

En las siguientes funciones realiza la evaluación de

$\frac{f[(x+h)-f(x)]}{h}$

11. $f(x) = 5x-3$

12. $f(x) = 2x + 1$

13. $f(x) = 3x^2 -4x+2$

14. $f(x) = 2x^2$

15. $f(x) = 3x^3-2x^2+5x+4$

16. $f(x) = x^2-3x$

17. $f(x) = \frac{5}{x}$

18. $f(x) = \sqrt{2x-3}$

19. $f(x) = \sqrt{2x^2+3x-2}$

20. $f(x) = \frac{1}{x}$

21. $f(x) = \frac{3}{x^2}$

En los siguientes problemas planteados, estimado estudiante calcule lo que se solicita.

22. Con los conjuntos X = {-3,-2, -1, 0, 1, 2, 3} y Y = {x/x ϵ Z}, calcula analítica y gráficamente la función f: X Y, dada por la ecuación “y = 4x+3”. Escribamos el dominio y la imagen.

23. Dados los conjuntos X = { -1, -1/2, 0, 1, 2 } y Y = {x/x ϵ R}, calcula analítica y gráficamente la función f: X Y, dada por la ecuación “y = 5x- 2”. Escribamos el dominio y la imagen.

24. Con los conjuntos X = {-2, -1, 0, 1, 2} y Y = {x/x ϵ Z}, calcula analítica y gráficamente la función f: X Y, dada por la ecuación “$y = 4x^2+3x-2$”. Escribamos el dominio y rango.

25. Con los conjuntos X = {-1, -1/2, 0, 1} y Y = {x/x ϵ R}, calcula analítica y gráficamente la función f: X

Y, dada por la ecuación "$y = 3x^2+4x-3$". Escribamos el dominio y rango.

26. Con los conjuntos X = {-3,-2, -1, 0, 1} y Y = {x/x ϵ R}, calcula analítica y gráficamente la función f: X Y, dada por la ecuación "$y = 2x^2+3x-2$". Escribamos el dominio y rango de la misma.

27. Con los conjuntos X = {-2, -1/2, 0, 1, 2} y Y = {x/x ϵ R}, calcula analítica y gráficamente la función f: X Y, dada por la ecuación "$y = \frac{2x^2}{3} + \frac{3x}{4} - 2$". Escribamos el dominio y rango.

28. Con los conjuntos X = {-2, -1, 0, 1, 2} y Y = {x/x ϵ R}, calcula analítica y gráficamente la función f: X Y, dada por la ecuación "$y = \frac{4x^2+5}{2x-1}$". Escribamos el dominio y rango.

Calcula el dominio y rango o imagen de cada función.

29. $f(x) = 4x + 3$

30. $f(x) = -2x + 7$

31. $f(a) = 2a^2 - 3a + 7$

32. $h(x) = \frac{x+3}{x-2}$

33. $h(a) = \frac{a+1}{a^2-3a+2}$

34. $f(b) = \frac{b-1}{b^2+b-6}$

35. $f(a) = \sqrt{2a-3}$

36. $f(x) = \sqrt{x-3}$

37. $f(p) = \frac{4}{\sqrt{3-2p}}$

38. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

Construye las gráficas de las siguientes funciones, determina el dominio y la imagen de las mismas.

39.

$$f(x) \quad \begin{matrix} 3x - 4, \text{ si } x>4 \\ 7-4x, \text{ si} x<4 \end{matrix}$$

40.

$$f(x) \begin{cases} 2x^2 - 4x+3, \text{ si } x>2 \\ 2x-1, \text{ si} x\leq 2 \end{cases}$$

41.

$$f(x) \begin{cases} x^2 - 4x+5, \text{ si } 2\leq x\leq 4 \\ 3x+2, \text{ si} x<2 \end{cases}$$

42.

$$f(x) \begin{cases} x^2+1, \text{ si } x\leq 1 \\ x^2, \text{ si } -1<x\leq 1 \\ 2x+3, \text{ si } x>1 \end{cases}$$

43.

$$f(x) \begin{cases} x^2+2, \text{ si } x\leq -1/2 \\ 3x^2, \text{ si } -1<x\leq 1 \\ -2x^2+3, \text{ si} x>1 \end{cases}$$

Lee y desarrolla

44. Una empresa de envíos nacionales e internacionales cobra por cada encargo $2 fijos, mas $ 1,5 por 25 kilómetros de trayecto en línea recta. ¿Cuántos dólares en total debo cancelar a la empresa de envíos por una encomienda a la ciudad de Quito?

45. José alquila un carro en una empresa de alquiler, cuyo precio fijo es de $ 20 y $ 5 por cada 15 km de recorrido. ¿Cuántos dólares en total cancela José a la empresa de alquiler, si recorre 1500 kilómetros?

46. La función N(x) determina la concentración en el cuerpo en partes por millón, de una cierta dosis de un medicamento, x horas después de ser

ingerido. $N(x)=(0.8x+1000)/(5x+4)$, $x\geq 15$

$N(x)=0.854x$, $0\leq x<15$

a. Representa la función N(x).

b. Después de cuantas horas comienza a ser eliminado el medicamento.

c. ¿Se puede afirmar que la concentración del medicamento en el cuerpo aumenta con el tiempo?

d. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que en el cuerpo queden menos de dos partes por millón del medicamento?

e. Sabiendo que si se aumenta una cierta cantidad la dosis, la concentración en el cuerpo tiene los mismos valores pero en la mitad del tiempo. ¿Cuál será la expresión de la función que define la dosis del medicamento en esta situación? Representa la nueva función

47. Para grabar una película, un coche caerá al mar después de subir por una rampa que termina en un precipicio. La función siguiente indica la altura h, expresada en metros, en la que se encuentra el coche en el instante t, en segundos:

$$f(t) \begin{cases} \frac{1}{3}t+3; & \text{si } 0 \leq t < 60 \\ -t^2+120t-3577; & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$$

Representa la función y responde a las cuestiones siguientes:

a. ¿Cuándo el coche inicia el movimiento a qué altura se encontraba?

b. Cuando el coche cae por el precipicio ¿a qué altura estaba?

c. ¿Cuánto tiempo está el coche en la rampa por encima de 15 metros?

d. ¿Cuánto tiempo tarda en coche en llegar al mar desde que cae por el precipicio?

48. La altura de un proyectil, en metros, está determinada por la función $h\ (t) = 8 + 2t - t^2$, para un tiempo determinado de *t* segundos.

a. Realiza la gráfica de la función.

b. Identifica el dominio y el rango de la función.

c. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?

d. ¿Después de cuánto tiempo el proyectil vuelve a caer al suelo?

49. El precio de una máquina se devalúa con el tiempo. Una empresa ha calculado que el valor de una máquina expresado en dólares, después de t

años viene dado por la expresión siguiente: p (t) = 2160-180t

Responde a las cuestiones siguientes:

a. ¿Cuánto costó la máquina?

b. ¿Cuál es el precio de la máquina después de dos años y medio?

c. ¿En qué momento la máquina se ha devaluado un 35%?

d. ¿Cuánto tiempo pasará desde la compra de la máquina hasta que no tenga ningún valor?

50. (Función de costo). Una empresa que fabrica computadoras tiene costos fijos de $2000 y el costo de la mano de obra y del material es de $180 por computadora. Determine la función de costo, es decir, el costo total como una función del número

de computadoras producidas. Si cada computadora se vende por $350, encuentre la función de ingresos y la función de utilidades

51. (Función de costo). Una empresa que fabrica calculadoras tiene costos fijos de $100 y el costo de la mano de obra y del material es de $20 por calculadora. Determine la función de costo, es decir, el costo total como una función del número de calculadoras producidas. Si cada calculadora se vende por $50, encuentre la función de ingresos y la función de utilidades

52. El estado máximo febril de una persona contagiada con un virus, en grados centígrados (^{o}C), está determinada por la función *f t*) = -

$x^2+8x+25$, para un tiempo determinado de *t* segundos.

a. Realiza la gráfica de la función.

b. Identifica el dominio y el rango de la función.

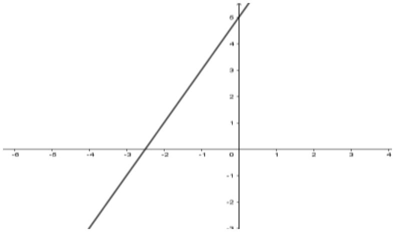
c. ¿Cuál es la temperatura máxima febril alcanzada por la persona contagiada?

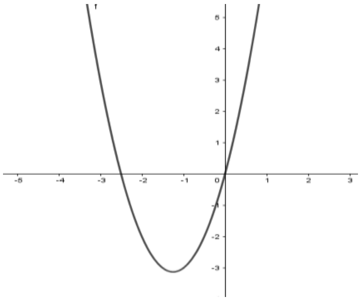
d. ¿Después de cuánto tiempo el estado febril vuelve a ser 0^oC?

En las siguientes gráficas, identifique escribiendo cuáles son funciones y si no lo son escriba el por qué?

53.

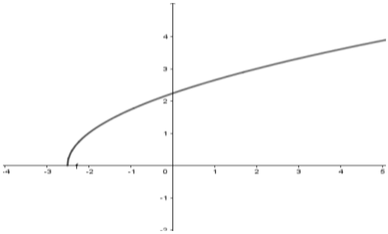
54.

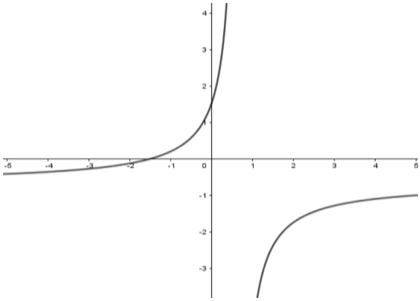




55.

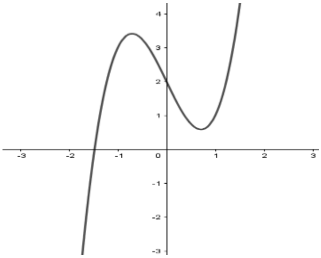
56.

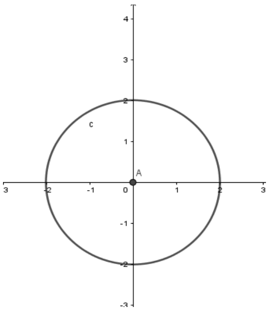




57.

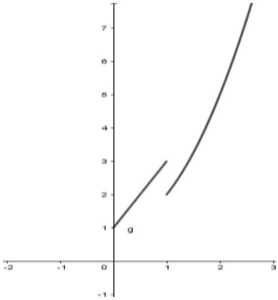
58.

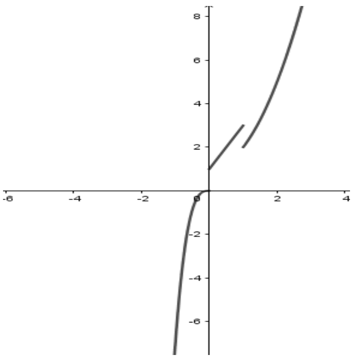




59.

60.





2.7. Actividades de refuerzo del capítulo.

1. Completa los enunciados para que tengan sentido completo.

* En toda función, los elementos del primer conjunto le pertenece una y sólo una

………………….del segundo conjunto.

* Toda función cumple una……………………..establecida en el ejercicio o problema

* En una función los elementos del primer conjunto se llama……………………………….

* En una función los elementos del segundo conjunto se llama…………………………….

* El dominio del ejercicio 35 de la parte de ejercicios y problemas es = {   }

* Las imágenes del ejercicio 35 de la parte de ejercicios y problemas es = {   }

2. complete el desarrollo del siguiente problema.

La función N(x) determina la

concentración en el cuerpo en partes por millón, de

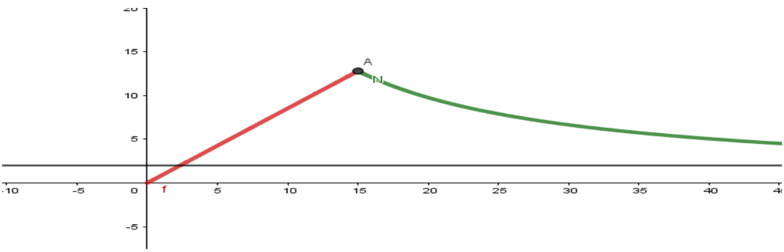
una cierta dosis de un medicamento, x

horas después de ser ingerido.

$N(x)=(0.8x+1000)/(5x+4),\ x\geq 15$

$N(x)=0.854x,\ \ 0\leq x<15$

a. Representa la función N(x).



b. Después de cuantas horas comienza a ser

eliminado el medicamento…………….

c. ¿Se puede afirmar que la concentración del

medicamento en el cuerpo aumenta con

el tiempo?.

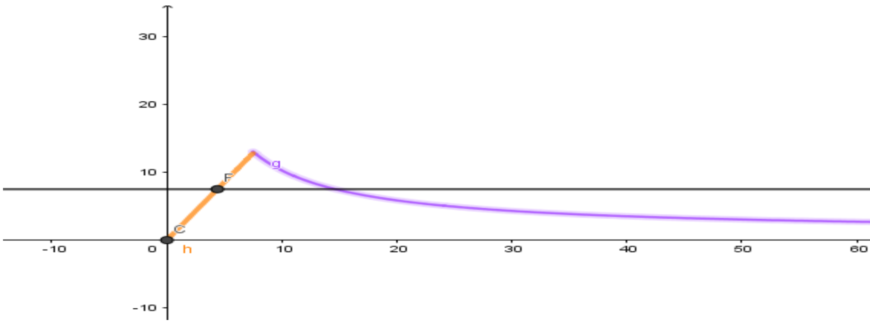
No, la concentración del medicamento en el cuerpo disminuye con el tiempo porque al ser reemplazo con más horas disminuye porque el tope máximo es de cero a quin ce horas, no más tiempo

d. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que en el cuerpo queden menos de dos partes por millón del medicamento?...

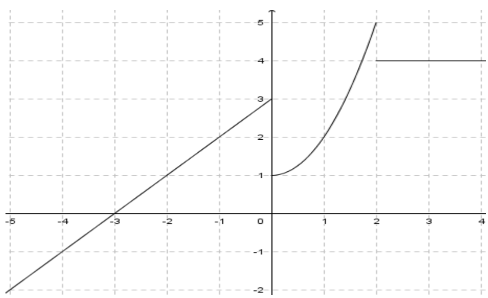
e. Sabiendo que si se aumenta una cierta cantidad la dosis, la concentración en el cuerpo tiene los mismos valores pero en la mitad del tiempo. ¿Cuál será la expresión de la función que define la dosis del medicamento en esta situación?

$$g(x) = (1000 + 10.8x) / (10x + 8)), \text{Si}(x \geq 7.5)$$

$$h(x) = 1.171x, \text{ Si}(0 \leq x < 7.5)$$

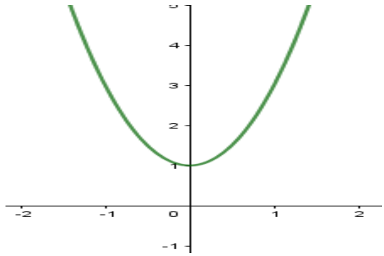


3. Complete el dominio y rango en las siguientes graficas de funciones.



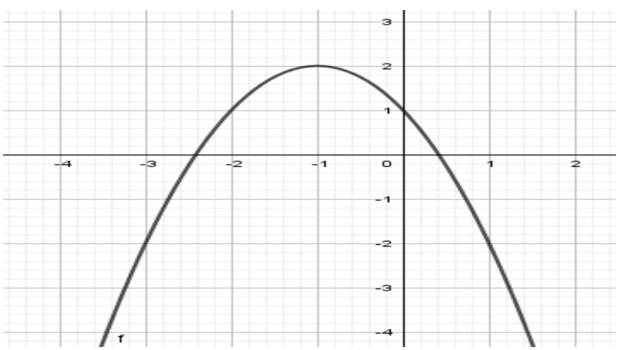
Dom.f = R Rang.f(x) =

Dom.f = (-∞, ∞) Rang.f(x) =



Dom.f = R Rang.f(x) =

Dom.f = (-∞, ∞) Rang.f(x) =



Dom.f = R Rang.f(x) =

Dom.f = (-∞, ∞) Rang.f(x) =

CAPÍTULO.3.

Calculo de límites y continuidad de una función.

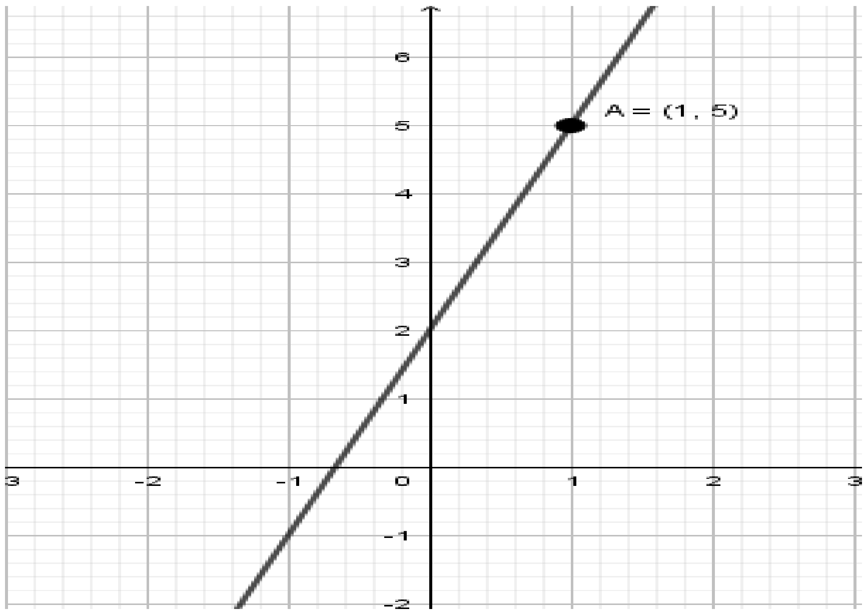
3.1. Introducción al estudio del límite de una función.

En el estudio del cálculo diferencial es muy importante revisar y practicar con ejemplos y problemas la noción del límite de una función cuyos conocimientos serán aplicados en temáticas posteriores en el estudio del cálculo. Para poder entender sin dificultades el concepto del límite de una función procederé a esquematizar gráficamente algunas situaciones luego formalizaremos el mismo.

Dada la función $f(x) = 3x + 2$, determina.

a) La imagen de la función cuando $x = 1$

x	… -2	-1	0	1	2
f(x)	-4	-1	2	5	8
X, f(x)	(-2, -4)	(-1, -1)	(0, 2)	(1, 5)	(2, 8)



Con x =1

f(x) = 3x+2

f(1) = 3(1) +2

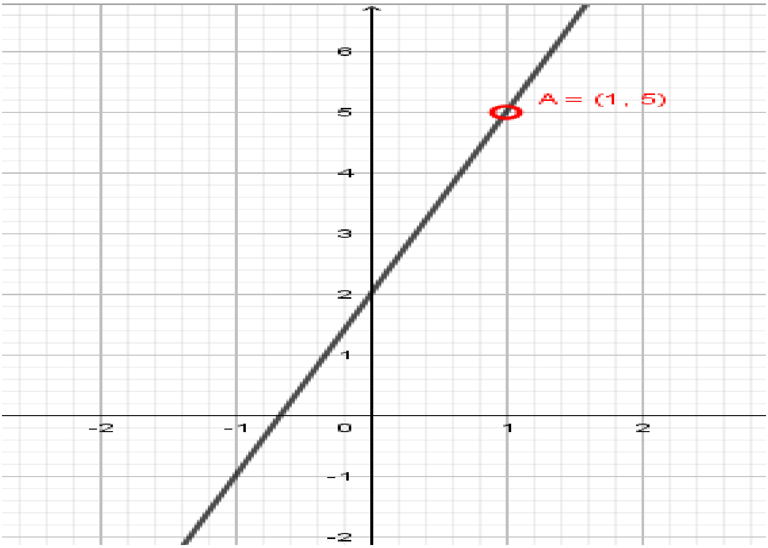
f(1) = 3+2

f(1) = 5

b) La imagen de la función cuando x está muy cercano

(limite) a 1

x	… 0.9	0.99	0.999	b	1.01
f(x)	4.7	4.97	4.997		5.03
X, f(x)	(0.9, 4.7)	(0.99, 4.97)	(0.999, 4.997)		(1.01, 5.03)



Con x =1

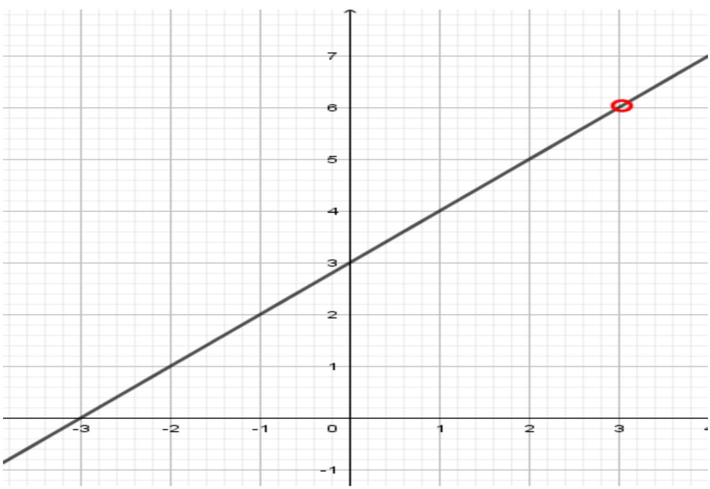
$$\lim_{x \to 1} (3x+2) = 3(1) +2$$

Lim (3x+2) = 3 +2

X → 1
Lim (3x+2) = 5
X → 1

Consideremos la función f(x) = $\frac{x^2-9}{x-3}$, donde x ≠ 3

x	… 2.98	2.99	b	3.01	3.02
f(x)	5.98	5.99		6.01	6.02
X, f(x)	(2.98, 5.98)	(2.99, 5.99)		(3.01, 6.01)	(3.02, 6.0



De acuerdo al proceso gráfico se determina que el límite de la función es 6, debido a que se acerca por la izquierda y por la derecha. Con esta breve aclaración gráfica de funciones y límites de las mismas estamos listos para conceptualizar al límite de una función.

Entorno en un punto. Un entorno de b es un intervalo abierto en la recta real, por la izquierda y por la derecha de b. siendo simétrico esto, entonces el punto ***b*** es el *centro del entorno* y la distancia simétrica al extremo del entorno, se le denomina radio del entorno.

Límite de una función cuando x tiende a b. Es igual a a.

En símbolos $\lim_{x \to b} = a$

Significa que para todo entorno de a, existe un entorno de ***b*** tal que tomado cualquier punto de éste, su imagen está en el entorno de a.

3.2. Limites laterales.

Para una mayor comprensión de estos límites partiré de ejemplos.

Dada la función f (x) $\begin{cases} 4x-1, \text{ si } x<5 \\ 8-x, \text{ si } x\geq 5 \end{cases}$

x	f(x)
4.9	18.8
4.99	18.96
4.999	18.996

Decimos que el límite lateral de f cuando x →5 por la izquierda es 19

En símbolos.

$Lim\ f(x) =\ 19$
x→5^-

x	f(x)
5	3
5.1	2.9
5.01	2.99
5.001	2.999

Decimos que el límite lateral de f cunado x →5 por la derecha es 3

En símbolos.

$Lim\ f(x) =\ 3$
x→5^-

$\frac{Lim}{x\to 5^-} f(x) \neq \frac{Lim}{x\to 5^+} f(x)$ No existe límite de una función

La condición necesaria y suficiente para que exista el límite de una función en un punto es que existan los dos límites laterales de esa función en ese punto y que ambos coincidan

Dada la función $\lim_{x\to 2} \begin{cases} 3x-1, \text{ si } x<2 \\ 7-x, \text{ si } x>2 \end{cases}$

$\frac{Lim}{x\to 2^-} f(x) = 3x - 1$ $\frac{Lim}{x\to 2^+} f(x) = 7 - x$

$\frac{Lim}{x\to 2^-} f(2^-) = 3(2^-) - 1$ $\frac{Lim}{x\to 2^+} f(2^+) = 7 - 2^+$

$\frac{Lim}{x\to 2^-} f(2^-) = 6^- - 1$ $\frac{Lim}{x\to 2^+} f(2^+) = 5^+$

$\frac{Lim}{x\to 2^-} f(2^-) = 5^-$ $\frac{Lim}{x\to 2^+} f(2^+) = 5^+$

$\frac{Lim}{x\to 2^-} f(2^-) = \frac{Lim}{x\to 2^+} f(2^+)$

Por lo tanto $\boldsymbol{\lim_{x\to 2} f(x) = 5}$

3.3. Propiedades de los límites

Si $\lim_{X\to b} f(x) = A$ y $\lim_{x\to b} h(x) = B$

a) Lim [f(x) + h(x)] = A + B
X → b

b) Lim [f(x) - h(x)] = A - B
X → b

c) Lim [f(x) * h(x)] = A * B
X → b

d) Lim [$\frac{f\ (x)}{h(x)}$] = $\frac{A}{B}$, siendo B ≠0
X → b

3.4. Cálculo de límites

Para calcular el límite de una función generalmente en un punto, se sustituye el punto en la función dada. Por otro lado para calcular el límite de una función en el infinito reemplazar el infinito en la función y proceda a evaluar la misma hasta obtener el resultado. Finalmente es necesario recalcar que en el cálculo del límite de una función no se debe proceder a resolver a la ligera al ejercicio o problema porque se nos pueden presentar límites sin indeterminación y con indeterminaciones para ello aplique lo siguiente.

Límites sin indeterminación.

1. Adición.

$b + \infty = \infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$b - \infty = -\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$-\infty + \infty = -\infty$

2. Producto.

$(+\infty)*(+\infty) = +\infty$

$(+\infty)*(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)*(-\infty) = +\infty$

Si $b>0 \Rightarrow \begin{cases} b*(+\infty) = +\infty \\ b*(-\infty) = -\infty \end{cases}$

Si $b<0 \Rightarrow \begin{cases} b*(+\infty) = -\infty \\ b*(-\infty) = +\infty \end{cases}$

Cociente.

$$\frac{b}{+\infty} = 0$$
$$\frac{b}{-\infty} = 0$$

si $b>0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{+\infty}{b} = +\infty \\ \dfrac{-\infty}{b} = -\infty \end{cases}$

Si $b<0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{+\infty}{b} = -\infty \\ \dfrac{-\infty}{b} = +\infty \end{cases}$

Ejemplos desarrollados.

1. Resuelva los siguientes límites si f(x) = 6

a) Lim f(x) = b)
Lim f(x) =
x →2 x
→∞
Lim f (2) = 6 Rta.
Lim f (∞) = 6 Rta.
x →2 x
→∞

2. Desarrolle los siguientes límites si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x$

$+ 2$

a) Lim g(x) = $3x^3+2x^2-5x+2$ b)
Lim g(x) = $3x^3+2x^2-5x+2$
x →+ ∞ x
→ - ∞

Lim g (∞) = $3(\infty)^3 + 2(\infty)^2 - 5(\infty) + 2$
Lim g(-∞) = $3(-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 5(-\infty) + 2$
x →+ ∞ x
→ - ∞

Lim g(∞) = $3\infty^3 + 2\infty^2 - 5\infty + 2$
Lim g(-∞) = $3(-\infty)^3 + 2\infty^2 - 5\infty + 2$
x →+ ∞ x
→ - ∞

Lim g(∞) = $\infty + \infty + \infty + 2$
Lim g(-∞) = $-\infty + \infty - \infty + 2$
x →+ ∞ x
→ - ∞

Lim $g(\infty) = \infty + 2$ Lim $g(-\infty) = -\infty + \infty + 2$
$x \to +\infty$ $x \to -\infty$

Lim $g(\infty) = \infty$ Lim $g(-\infty) = -\infty + \infty$
$x \to +\infty$ $x \to -\infty$

Lim $g(\infty) = \infty$ Rta. Lim $g(-\infty) = -\infty$ Rta.
$x \to +\infty$ $x \to -\infty$

3. Desarrolle los siguiente límites si $f(x) = 4x^3 - 7x^2 - 6x + 3$

a) Lim $f(x) = 4x^3-7x^2-6x+3$ b) Lim $f(x) = 4x^3-7x^2-6x+3$
$x \to +\infty$ $x \to -\infty$

Lim $f(\infty) = 4(\infty)^3 - 7(\infty)^2 - 6(\infty) + 3$ Lim $f(-\infty) = 4(-\infty)^3 - 7(-\infty)^2 - 6(-\infty) + 3$
$x \to +\infty$ $x \to -\infty$

Lim $f(\infty) = 4\infty^3 - 7(\infty^2) - 6(\infty) + 3$ Lim $f(-\infty) = 4(-\infty)^3 - 7(\infty^2) - 6(-\infty) + 3$
$x \to +\infty$ $x \to -\infty$

Lim f(∞) = ∞ + ∞ + ∞ + 3 Lim f(-∞) = - ∞ + ∞ + ∞ + 3

x →+ ∞ x → - ∞

Lim f(∞) = ∞ + ∞ Lim f(-∞) = - ∞ + ∞ + 3

x →+ ∞ x → - ∞

Lim f(∞) = ∞ Lim f(-∞) = - ∞ + ∞

x →+ ∞ x → - ∞

Lim f(∞) = ∞ Rta. Lim f(-∞) = - ∞ Rta.

x →+ ∞ x → - ∞

4. Desarrolle los siguiente límites si $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x + 1$

a) Lim $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ b) Lim $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x + 1$

x → 3 x → - 2

Lim $f(3) = 3(3)^3 - 5(3)^2 + 2(3) + 1$ Lim $f(-2) = 3(-2)^3 - 5(-2)^2 + 2(-2) + 1$

x → 3 x → - 2

$\lim_{x \to 3} f(3) = 3(27) - 5(9) + 6 + 1$

$\lim_{x \to -2} f(-2) = 3(-8) - 5(4) - 4 + 1$

$\lim_{x \to 3} f(3) = 81 - 45 + 7$

$\lim_{x \to -2} f(-2) = -24 - 20 - 3$

$\lim_{x \to 3} f(3) = 43$ Rta

$\lim_{x \to -2} f(-2) = -47$ Rta.

5. Calcule el límite de $\lim_{x \to 2} \left(-3x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{x \to 2} \left(-3x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}\right) = -3(2)^2 + \frac{7}{2}(2) + \frac{1}{2}$$

$$-12 + 7 + \frac{1}{2}$$

$$= -5 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-10+1}{2}$$

$$= \frac{-9}{2} \text{ RTA}$$

6. $$\lim_{x \to -1/2} \left[\frac{8x^2+5x+8}{\frac{1}{2}x+5}\right] = \frac{8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{-1}{2}\right) + 8}{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) + 5}$$

$$= \frac{8\left(\frac{1}{4}\right) + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 8}{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) + 5}$$

$$=\frac{8\left(\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{5}{2}\right)+8}{-\frac{1}{4}+5}$$

$$=\frac{2-\frac{5}{2}+8}{\frac{19}{4}}$$

$$=\frac{10-\frac{5}{2}}{\frac{19}{4}}$$

$$=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{19}{4}}$$

$$=\frac{60}{38}$$

$$=\frac{30}{19}$$ Rta.

Limite cuando x →0. Ejemplos

1. Lim $(8x^3+5/2x^2+2x-3) = 8(0)^3+\frac{5}{2}(0)+2(0)-3$
   x→0

$= 8(0)+\frac{5}{2}(0)+0-3$

$= 0+0+0-3$

$= -3$ Rta.

2. Lim $\left(\frac{6x^2+4x}{5x^3+4x^2+6x}\right) = \frac{\frac{6x^2}{x}+\frac{4x}{x}}{\frac{5x^3}{x}+\frac{4x^2}{x}+\frac{6x}{x}}$
   x→0

$$= \frac{6x+4}{5x^2+4x+6}$$

$$= \frac{6(0)+4}{5(0)^2+4(0)+6}$$

$$= \frac{0+4}{0+0+6}$$

$$= \frac{4}{6}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ Rta.}$$

3.- Lim. $\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right) = [\frac{(\sqrt{1+x}-1)((\sqrt{1+x}+1)}{x\,(\sqrt{1+x}+1)}]$

x→0

$$= [\frac{(\sqrt{1+x})^2-(1)^2}{x\,(\sqrt{1+x}+1)}]$$

$$=[\frac{1+x-1}{x\,(\sqrt{1+x}+1)}]$$

$$=[\frac{x}{x\,(\sqrt{1+x+1})}]$$

$$= [\frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)}]$$

$$= [\frac{1}{(\sqrt{1+0}+1)}]$$

$$= [\frac{1}{(\sqrt{1}+1)}]$$

$$= \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$ Rta.

4.- Lim $\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+2x}$ = $[\frac{(\sqrt{9+x}-3)((\sqrt{9+x}+3)}{x(x+2)\,(\sqrt{9+x+3})}]$

x→0

$$= [\frac{(\sqrt{9}+x)^2-(3)^2}{x(x+2)\,(\sqrt{9+x}+3)}]$$

$$= [\frac{9+x-9}{x(x+2)\,(\sqrt{9+x}+3)}]$$

simplifica

$$= [\frac{x}{x(x+2)\,(\sqrt{9+x+3})}]$$

simplifica

$$=[\ \frac{1}{(x+2)\,(\sqrt{9+x}+3)}]$$

$$=\frac{1}{(0+2)\,(\sqrt{9+0}+3)}]$$

Remplazamos el límite

$$= \frac{1}{(2)\,(\sqrt{9}+3)}]$$ Raíz de

9 = 3+3

$$= \frac{1}{2\,(3+3)}]$$

$$= \frac{1}{2\,(6)}$$

$$= \frac{1}{12} \qquad \text{Rta.}$$

5.- Lim $\frac{(\sqrt{x+3}-2)}{x^2-1} \quad = \frac{(\sqrt{x+3}-2)\,(\sqrt{x+3}+2)}{(x+1)(x-1)\,(\sqrt{x+3}+2)}$

x→0

$$= \frac{(\sqrt{x+3})^2-(2)^2}{(x-1)\,(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x+3-4}{(x-1)\,(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{1}{(0+1)(\sqrt{0+3}+2)}$$

$$= \frac{1}{(1)(\sqrt{3}+2)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{3}+2)} \qquad \text{Rta.}$$

$$= \frac{1}{1.7+2}$$

$$= \frac{1}{3.7}$$

$$= 0,27$$

Límites de funciones con indeterminaciones.

Se nos pueden presentar algunos tipos de límites con indeterminaciones, los más estudiados son

Tipo 1: Límites con indeterminación $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

***** Si el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del denominador, el límite es ± ∞ dependiendo del signo del coeficiente principal del polinomio del numerador

Ejemplos.

1. Determine el límite de: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^3+2x-3}{2x^2-5x+2}\right)$

Primer procedimiento directamente.
Segundo procedimiento.

lim $\left(\frac{3x^3+2x-3}{2x^2-5x+2}\right) = \infty$ Rta.

lim $\left(\frac{3x^3+2x-3}{2x^2-5x+2}\right) = \frac{3\frac{x^3}{x^3}+2\frac{x}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{2\frac{x^2}{x^3}-5\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}$

x→∞

x→∞

lim

$\left(\frac{3x^3+2x-3}{2x^2-5x+2}\right) = \frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}$

x→∞

lim

$\left(\frac{3x^3+2x-3}{2x^2-5x+2}\right) = \frac{3+0-0}{0+0+0}$

x→∞

lim

$\left(\frac{3x^3+2x-3}{2x^2-5x+2}\right) = \frac{3}{0}$

x→∞

lim

$\left(\frac{3x^3+2x-3}{2x^2-5x+2}\right) = \infty$ Rta.

x→∞

2. Determine el límite de: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-4x^4+2x^2-3}{x^2-5x+2}\right)$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-4x^4+2x^2-3}{x^2-5x+2}\right) = -\infty$$

***** Si el grado del polinomio del numerador es igual que el grado del denominador, el límite de la función es el cociente de los coeficientes principales de los polinomios.

Ejemplos.

1. Resuelve el siguiente límite: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^3+4x-1}{2x^3-6x+5}\right)$

Primer procedimiento directamente.

Segundo procedimiento.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^3+4x-1}{2x^3-6x+5}\right) = \frac{3}{2} \text{ Rta.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^3+4x-1}{2x^3-6x+5}\right) = \frac{3\frac{x^3}{x^3}+4\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{2\frac{x^3}{x^3}-6\frac{x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}$$

lim

$(\frac{3x^3+4x-1}{2x^2-6x+5}) = \frac{3+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^3}}$

x→∞

lim

$(\frac{3x^3+4x-1}{2x^3-6x+5}) = \frac{3+0-0}{2+0+0}$

x→∞

lim

$(\frac{3x^3+4x-1}{2x^2-6x+5}) = \frac{3}{2}$ Rta.

x→∞

2. Resuelve el siguiente límite: lim $(\frac{3x^4+4x^2-x}{5x^4-3x+2})$

x→∞

lim $(\frac{3x^4+4x^2-x}{5x^4-3x+2}) = \frac{3}{5}$ Rta.

x→∞

3. Resuelve el siguiente lim $(\frac{3x^4-5x^3+x+7}{8x^4-2x^2+3x+5})$

x→∞

lim $(\frac{3x^4-5x^3+x+7}{8x^4-2x^2+3x+5}) = \frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{5x^3}{x^4}+\frac{x}{x^4}+\frac{7}{x^4}}{\frac{8x^4}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}+\frac{3x}{x^4}+\frac{5x}{x^4}}$

x→∞

$=\frac{3-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^3}+\frac{7}{x^4}}{8-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^4}}$

$$=\frac{3-\frac{5}{\infty}+\frac{1}{\infty^3}+\frac{7}{\infty^4}}{8-\frac{2}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}+\frac{5}{\infty^4}}$$

$$=\frac{3-0+0+0}{8-0+0+0}$$

$$=\frac{3}{8}\text{ Rta.}$$

* Si el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del denominador, el límite es cero.

Ejemplo.

1. Resuelve el siguiente $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-5x^2+x+7}{2x^4-x^2+5x+3}\right)$

Primer procedimiento directamente.
Segundo procedimiento.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-5x^2+x+7}{2x^4-x^2+5x+3}\right)=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-5x^2+x+7}{2x^4-x^2+5x+3}\right)=\frac{3\frac{x^3}{x^4}-5\frac{x^2}{x^4}+\frac{x}{x^4}+\frac{7}{x^4}}{2\frac{x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+5\frac{x}{x^4}+\frac{3}{x^4}}$$

$$=\frac{\frac{3}{x^1}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{7}{x^4}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{3}{x^4}}$$

$$= \frac{\frac{3}{\infty} - \frac{5}{\infty^2} + \frac{1}{\infty^3} + \frac{7}{\infty^4}}{2 - \frac{1}{\infty^2} + \frac{5}{\infty^3} + \frac{3}{\infty^4}}$$

$$= \frac{0 - 0 + 0 + 0}{2 - 0 + 0 + 0}$$

$$= \frac{0}{2}$$

= 0 Rta.

2. Resuelve el siguiente $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 2}{x^4 - 2x^2 + 3x + 1} \right)$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 2}{x^4 - 2x^2 + 3x + 1} \right)$ = 0 Rta.

3. Desarrolle el siguiente $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + 3x + 1} \right)$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + 3x + 1} \right)$ = 0 Rta.

Tipo 2: Límites con indeterminación ∞ - ∞

Este tipo de límites aparece al calcular la diferencia de

funciones racionales o irracionales

Ejemplos

1. Desarrolle al siguiente $\lim\limits_{x \to \infty} [\sqrt{x^2+4} - (x+1)]$

$\lim\limits_{x \to \infty} [\sqrt{x^2+4} - (x+1)] = \sqrt[2]{\infty^2+4} - (\infty+1)$

$\lim\limits_{x \to \infty} [\sqrt{x^2+4} - (x+1)] = \sqrt[2]{\infty^2} - (\infty)$

$\lim\limits_{x \to \infty} [\sqrt{x^2+4} - (x+1)] = \infty - \infty$. **Por lo tanto.**

$\lim\limits_{x \to \infty} [\sqrt{x^2+4} - (x+1)] = \dfrac{[\sqrt{x^2+4} - (x+1)][\sqrt{x^2+4} + (x+1)]}{\sqrt{x^2+4} + (x+1)}$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+4} + (x+1)}$$

$$= \frac{x^2+4 - x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2+4} + (x+1)}$$

$$= \frac{-2x+5}{\sqrt{x^2+4} + (x+1)}$$

$$= \frac{-2\frac{x}{x} - \frac{5}{x}}{\sqrt[2]{\frac{x^2+4}{x^2}} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{-2 \quad - \frac{5}{x}}{\sqrt[2]{\frac{x^2+4}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{-2 \quad - \frac{5}{\infty}}{\sqrt[2]{1+\frac{4}{\infty^2}} + 1 + \frac{1}{\infty}}$$

$$= \frac{-2 \quad - 0}{\sqrt[2]{1+0} + 1+0}$$

$$= \frac{-2}{1+1}$$

$$= \frac{-2}{2}$$

= - 1 Rta.

2. Desarrolle al siguiente lim $\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x-2}\right)$
x →∞

lim $\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x-2}\right) = \frac{[\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x-2}][\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x-2}]}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x-2}}$
x →∞

$$= \frac{([\sqrt{x^2+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{x^2+2-x+2}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{x^2-x+4}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\infty} + \frac{4}{\infty^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{\infty^2}} + \sqrt{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty^2}}}$$

$$= \frac{1 - 0 + 0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{0-0}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{0}}$$

$$= \frac{1}{1 + 0}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$= 1$ Rta.

Tipo 3: Límites con indeterminación $\frac{0}{0}$

Este tipo de límites aparece al calcular el límite en un punto de cocientes de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y se puede dar de dos formas. Tómese como punto x = b

Primera forma. Si Q (b) ≠ 0, tenemos que estudiar los limites laterales para ver si existe el límite en el punto (b), ya que puede no existir o valer ∞ o - ∞

Ejemplos.

1. Resuelve el siguiente $\lim_{x \to -1} \left(\frac{3x^2+4x+2}{2x^2+x+1} \right)$

Analizamos el denominador $Q(x) = 2x^2 + x + 1$

$$Q(-1) = 2(-1)^2 + (-1) + 1$$
$$Q(-1) = 2(1) - 1 + 1$$
$$Q(-1) = 2 - 1 + 1$$
$$Q(-1) = 2$$
$$2 \neq 0$$

$$\lim_{x \to -1} \left(\frac{3x^2+4x+2}{2x^2+x+1} \right) = \frac{3(-1)^2+4(-1)+2}{2(-1)^2+(-1)+1}$$

$$= \frac{3(1)-4+2}{2(1)-1+1}$$

$$= \frac{3-4+2}{2-1+1}$$

$= \frac{1}{2}$ Rta.

2. Resuelve el siguiente $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2+2x+3}{x^2-x+1} \right)$

Analizamos el denominador $Q(x) = x^2 - x + 1$

$Q(2) = (2)^2 - (2) + 1$

$Q(2) = 4 - 2 + 1$

$Q(2) = 3$

$3 \neq 0$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2+2x+3}{x^2-x+1} \right) = \frac{(2)^2+2(2)+3}{(2)^2-(2)+1}$$

$$= \frac{4+4+3}{4-2+1}$$

$$= \frac{11}{3} \text{ Rta.}$$

3. Desarrolle el siguiente $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-25}{x^2-2x+3} \right)$

Analizamos el denominador $Q(x) = x^2 - 2x + 3$

$Q(2) = (2)^2 - 2(2) + 3$

$Q(2) = 4 - 4 + 3$

$Q(2) = 3$

$3 \neq 0$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-25}{x^2-2x-3} \right) = \frac{(x+5)(x-5)}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{(2+5)(2-5)}{(2-3)(2+1)}$$

$$= \frac{(7)(-3)}{(-1)(3)}$$

$$= \frac{-21}{-3} \quad \text{Rta.}$$

$$= 7 \quad \text{Rta.}$$

Segunda forma. Si Q (b) = 0, resulta que x = b es raíz de P(x) y de Q(x) y su factorización tendrá un factor del tipo (x-a).

Ejemplos.

1. Desarrolle el siguiente $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^3-8}{x^2-4} \right)$

Analizamos el denominador $Q(x) = x^2 - 4$

$$Q(-2) = (-2)^2 - 4$$
$$Q(-2) = 4 - 4$$
$$Q(-2) = 0$$

Aplicamos límites laterales.

lim $\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}$ lim

$\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}$

x→2⁺ x→2⁻

$= \frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}$

$= \frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}$

$= \frac{(2)^2+2(2)+4}{(2+2)}$

$= \frac{(-2)^2+2(-2)+4}{(-2+2)}$

$= \frac{4+4+4}{4}$ Rta.

$= \frac{4-4+4}{0}$ Rta.

$= \frac{12}{4}$ Rta.

$= \frac{4}{0}$ Rta.

$=$ 3 Rta.

$= \infty$

2. Desarrolle el siguiente lim $\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$
x→2

Analizamos el denominador $Q(x) = x^2 - 3x + 2$

$Q(2) = (2)^2 - 3(2) + 2$

$Q(2) = 4 - 6 + 2$

$$Q(2) = 0$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \right) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+2)}{(x-1)}$$

$$= \frac{(2+2)}{(2-1)}$$

$$= \frac{4}{1} \quad \text{Rta.}$$

$$= 4 \quad \text{Rta.}$$

3. Desarrolle el siguiente $\lim_{a \to 3} \left(\frac{a^3-1}{2a^4-2a^3-a+1} \right)$

Analizamos el denominador $Q(x) = 2a^4 - 2a^3 - a + 1$
Analizamos el numerador $P(x) = a^3 - 1$

$Q(3) = 2(3)^4 - 2(3)^3 - 3 + 1$

$P(3) = (3)^3 - 1$

$Q(2) = 162 – 54 - 3 + 1$

$P(3) = 27 - 1$

$Q(2) = 106$

$P(3) = 26$

Considere que el denominador no es cero pero tiene un factor de la forma (x-a)

$$\lim_{a\to 3}\left(\frac{a^3-1}{2a^4-2a^3-a+1}\right)=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(2a^3-1)}$$

$$=\frac{a^2+a+1}{2a^3-1}$$

$$=\frac{(3)^2+3+1}{2(3)^3-1}$$

$$=\frac{9+4}{54-1}$$

$$=\frac{13}{53}\text{Rta.}$$

Tipo 4: Límites con indeterminación 0. (±∞)

Ejemplos.

1. Resuelve el siguiente $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2}{\sqrt[2]{x^4-3}}\right)(5x-2)$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2}{\sqrt[2]{x^4-3}}\right)(5x-2)=\left(\frac{2}{\sqrt[2]{x^4-3}}\right)(5x-2)$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt[2]{(-\infty)^4-3}}\right)[5(-\infty)-2]$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt[2]{(\infty)^4-3}}\right)[-\infty-2]$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt[2]{\infty-3}}\right)[-\infty]$$

$= \left(\frac{2}{\sqrt[2]{\infty}} \right)[-\infty]$

$= \left(\frac{2}{\infty} \right)[-\infty]$

$= (0)[-\infty]$

Ahora operando.

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x^4-3}} \right)(5x-2) = \left(\frac{10x-4}{\sqrt{x^4-3}} \right)$

$= \left(\frac{\frac{10x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} - \frac{3}{x^4}}} \right)$

$= \left(\frac{\frac{10}{x} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^4}}} \right)$

$= \left(\frac{\frac{10}{\infty} - \frac{4}{\infty^2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{\infty^4}}} \right)$

$= \left(\frac{0 - 0}{\sqrt{1 - 0}} \right)$

$= \left(\frac{0}{\sqrt{1}} \right)$

$= \left(\frac{0}{1} \right)$

$= 0$ Rta.

2. Resuelve el siguiente $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3}{\sqrt[2]{x^2-3}} \right)(3x-2)$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{\sqrt[2]{x^2-3}}\right)(3x-2) = \left(\frac{3}{\sqrt[2]{x^2-3}}\right)(3x-2)$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt[2]{(\infty)^2-3}}\right)[3(\infty)-2]$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt[2]{(\infty)^2-3}}\right)[\infty-2]$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt[2]{\infty-3}}\right)[\infty]$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt[2]{\infty}}\right)[\infty]$$

$$= \left(\frac{2}{\infty}\right)[\infty]$$

$$= (0)[\infty]$$

Ahora operando.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-3}}\right)(3x-2) = \left(\frac{9x-6}{\sqrt{x^2-3}}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{9x}{x}-\frac{6}{x^2}}{\sqrt{\frac{x2}{x2}-\frac{3}{x2}}}\right)$$

$$= \left(\frac{9-\frac{6}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{x2}}}\right)$$

$$= \left(\frac{9-\frac{6}{\infty^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{\infty 2}}}\right)$$

$$= \left(\frac{9-0}{\sqrt{1-0}} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{\sqrt{1}} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{1} \right)$$

$= 9$ Rta.

Tipo 5: Límites con indeterminación 1^{∞}

Se utiliza la siguiente fórmula

$$\lim_{x \to x_o} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \to x_o} g(x)[f(x) - 1]}$$

Ejemplos.

1. Resuelve el siguiente $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^{2x}$

$$\lim_{x \to x_o} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \to x_o} g(x)[f(x) - 1]}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^{2x} = e^{\lim_{x \to \infty} 2x \left[\frac{x^2+2}{x^2-1} - 1 \right]}$$

$$= e^{\lim_{x \to \infty} 2x \left[\frac{x^2+2-x^2+1}{x^2-1} \right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2x\left[\frac{3}{x^2-1}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{6x}{x^2-1}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{\frac{6x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{\frac{6}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\right]}$$

$$= e^{\left[\frac{\frac{6}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty^2}}\right]}$$

$$= e^{\left[\frac{0}{1-0}\right]}$$

$$= e^{\left[\frac{0}{1}\right]}$$

$$= e^{0}$$

$= 1$ Rta.

2. Resuelve el siguiente $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 5x)^{2/x}$

$$\lim_{x \to x_o} [\,f(x)\,]^{g(x)} = \underset{e^{\,x \to x_o}}{\text{Lim}} \quad g(x)\,[\,f(x) - 1\,]$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + 5x)^{2x} = \underset{e^{\,x \to 0}}{\text{Lim}} \quad \frac{2}{x}[\,1 + 5x - 1\,]$$

$$= \underset{e^{\,x \to 0}}{\text{Lim}} \quad \frac{2}{x}[\,5x\,]$$

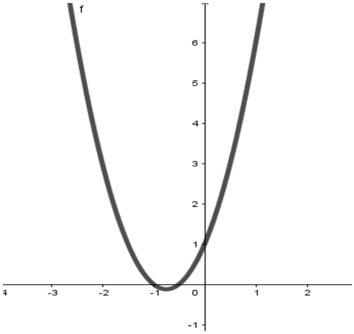
$$= \underset{e^{\,x \to 0}}{\text{Lim}} \quad [\,10\,]$$

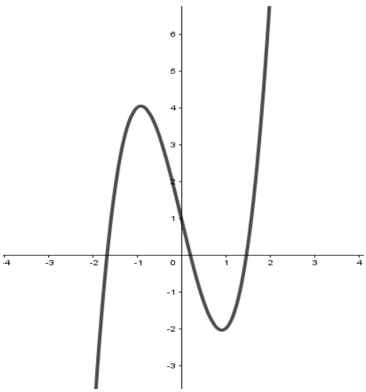
$$= e^{10}$$

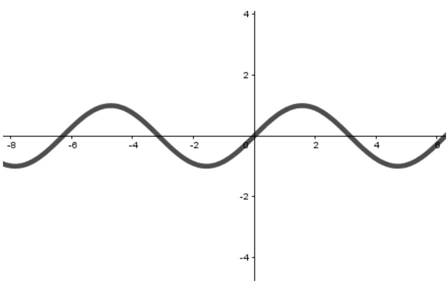
3.5. La Continuidad y discontinuidad de una función.

Continuidad de una función. Una función es continúa si y solo sí en la trayectoria del gráfico no existen interrupciones.

Ejemplos.

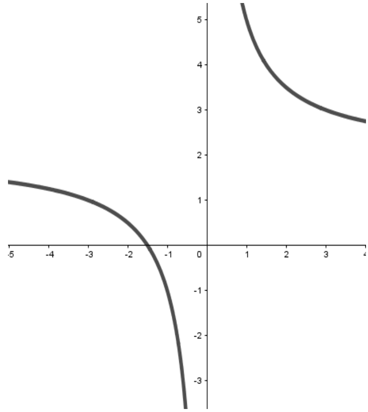

f
6
5
4
3
2
1
-1
-3
-2
-1
0
1
2

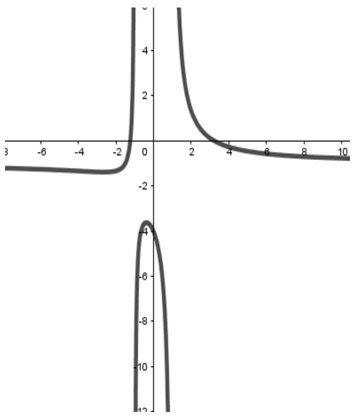

6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

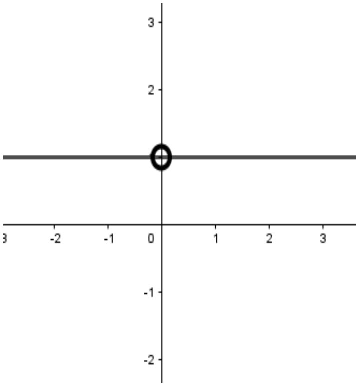

4
2
-2
-4
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6

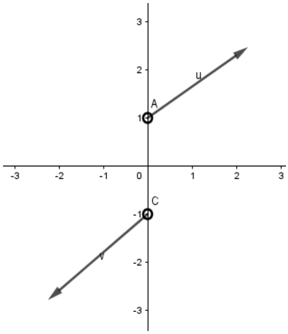
Discontinuidad de una función. Una función es discontinúa si y solo sí en la trayectoria del gráfico existen interrupciones.

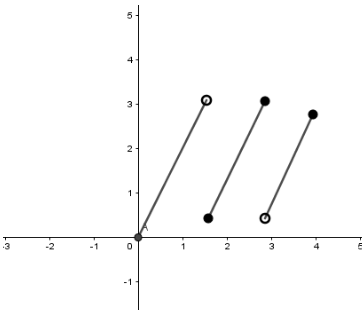
Ejemplos.

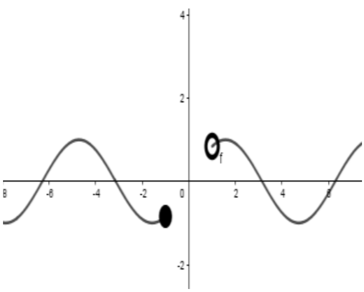

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
5 4 3 2 1 -1 -2 -3


-6 -4 -2 0 2 4 6 8 10
4 2 -2 -4 -6 -8 -10


3
2
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2



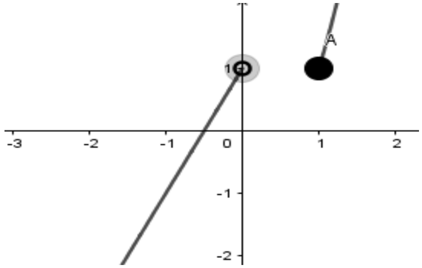




Determine la gráfica, dominio, rango y escriba si la función es continua o discontinuada.

$f(x)$ $\quad 2x+1$, si $x<0$

$\quad\quad 2x^2 - 1$, si $x \geq 1$



Dom.f(x) = $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

Rang.f(x) = R o Rang. y = $(-\infty, +\infty)$

La función dada pertenece a una función discontinuada.

Continuidad de una función en un punto. Se debe tener en cuenta lo siguiente.

1.- f (x) está definida en x = a

2.- $\lim_{x \to a} f(x)$, existe.

3. - $\lim_{x \to a} f(x) = f(x)$

En caso que no se cumpla uno de estos puntos la función es discontinua.

Ejemplos desarrollados.

1. Determine si la función dada f(x) = $\frac{2x^2+3x-2}{6}$, es continua en los puntos 2 y -2

f(x) = $\frac{2x^2+3x-2}{6}$ f(x) = $\frac{2x^2+3x-2}{6}$

f (2) = $\frac{2(2)^2+3(2)-2}{6}$ f (-2) = $\frac{2(-2)^2+3(-2)-2}{6}$

f (2) = $\frac{8+6-2}{6}$ f (-2) = $\frac{8-6-2}{6}$

f (2) = $\frac{12}{6}$ f (-2) = $\frac{0}{6}$

f (2) = 2 Rta. f (-2) = 0 Rta.

Lim. ($\frac{2x^2+3x-2}{6}$) = $\frac{2(2)^2+3(2)-2}{6}$ Lim. ($\frac{2x^2+3x-2}{6}$) = $\frac{2(-2)^2+3(-2)-2}{6}$

X-> 2 x-> -2

= $\frac{8+6-2}{6}$

= $\frac{-4-6-2}{6}$

= $\frac{12}{6}$

= $\frac{0}{6}$

= 2

= 0

Lim. F (x) = f(x)

Lim. f (x) = f(x)

X ->2

x -> -2

2 = 2

0 = 0

La función es continua en este punto. La función es continua en este punto.

SOLUCIÓN: El ejercicio de la función dada es continua en el punto 2 y -2 porque si cumple con las condiciones de continuidad.

2. Determine si la función dada f (x)= $\frac{x-3}{x^2-9}$ es continua en los puntos -4, 1 y 3

f (x)= $\frac{x-3}{x^2-9}$

f (x)= $\frac{x-3}{x^2-9}$

f (x)= $\frac{x-3}{x^2-9}$

f (1)= $\frac{1-3}{(1)^2-9}$

f (3)= $\frac{3-3}{(3)^2-9}$

f (-4)= $\frac{-4-3}{(-4)^2-9}$

f (1)= $\frac{-2}{1-9}$

f (3)= $\frac{0}{9-9}$

f (-4)= $\frac{-7}{16-9}$

f (1)= $\frac{-2}{-8}$

f (3)= $\frac{0}{0}$

f (-4)= $\frac{-7}{7}$

f (1)= $\frac{1}{4}$

f (3)= 0

f (-4)= -1

Lim. $(\frac{x-3}{x^2-9})$ = $\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$

Lim. $(\frac{x-3}{x^2-9})$ = $\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$

Lim. $(\frac{x-3}{x^2-9})$ = $\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$

X-> 1

x-> 3

x-> -4

Lim. $(\frac{x-3}{x^2-9})$ = $\frac{1}{(x+3)}$

Lim. $(\frac{x-3}{x^2-9})$ = $\frac{1}{(x+3)}$

Lim. $(\frac{x-3}{x^2-9})$ = $\frac{1}{(x+3)}$

X-> 1

x-> 3

x-> -4

= $\frac{1}{1+3}$

=$\frac{1}{3+3}$

=$\frac{1}{-4+3}$

= $\frac{1}{4}$

= $\frac{1}{6}$

= $\frac{1}{-1}$

= -1

Lim. f(x)= f(x)

Lim. f(x)= f(x)

Lim. f(x)= f(x)

X-> 1

x->3

x->-4

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{6} \neq 0$

-1 = -1

Continúa Discontinúa

Continúa.

SOLUCIÓN: El ejercicio de la función planteada es continua en el punto 1,-4 porque cumple con las condiciones de continuidad y en el punto 3 la función es discontinua porque no cumple con las reglas dadas.

3. Determine si la función dada f(x) = $\frac{x-2}{x^2-4}$ es continua en los puntos 2 y -4

f(x)= $\frac{x-2}{x^2-4}$
f(x)= $\frac{x-2}{x^2-4}$

f(2)= $\frac{2-2}{(2)^2-4}$ f (-4)= $\frac{-4-2}{(-4)^2-4}$

f(2)= $\frac{0}{4-4}$ f (-4)= $\frac{-6}{16-4}$

f(2)= $\frac{0}{0}$ f (-4)= $\frac{-6}{12}$

f)2= 0 f(-4)= $-\frac{1}{2}$

Lim. ($\frac{x-2}{x^2-4}$) = $\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$ Lim. ($\frac{x-2}{x^2-4}$) = $\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$

x->2 x->-4

= $\frac{1}{(x+2)}$

= $\frac{1}{(x+2)}$

= $\frac{1}{2+2}$

= $\frac{1}{-4+2}$

= $\frac{1}{4}$ $=-\frac{1}{2}$

Lim. F(x)= f(x) Lim. F(x)= f(x)

X-> 2 x->-4

$\frac{1}{4} \neq 0$ $\frac{1}{-2}$

= $\frac{1}{-2}$

Discontinúa

Continúa.

Solución: El ejercicio de la función dada es discontinua en el punto 2 porque no cumple con las reglas establecidas y en el punto -4 la función es continua porque si cumple con las condiciones establecidas.

3.6. Ejercicios y problemas propuestos del capítulo.

1. Dada la función $\lim_{x \to 3} \begin{cases} 2x-4, & \text{si } x<1 \\ 3-2x, & \text{si } x>1 \end{cases}$, determine los límites laterales.

2. Determine los límites laterales de la siguiente función. $\lim_{x \to 3^-} = \frac{x^3-9}{x^2-x}$

3. Determine los límites laterales de la siguiente función. Lim $= \frac{6x^2-3x+1}{x^2-2}$

x→5^-

4. Determine los límites laterales de la siguiente función. Lim $= \frac{3x+1}{2x-4}$

x→2^+

5. Determine los límites laterales de la siguiente función. Lim $= \frac{4x^2+1}{2x-10}$

x→5^-

6. Determine los límites laterales de la siguiente función. Lim $= \frac{3x^2+x-2}{2x-10}$

x→4^-

Resuelve los siguientes límites:

7. lim $(4x^4 - 3x^2 + 2x + 1)$
   x→∞

8. lim $(3x^2 - 2x + 1)$
   x→∞

9. lim $(5/3x^2 - 3/2x + 2/5)$

x→- ∞

10. lim $(\frac{3x^2}{2} + 2x + 4)$
x→- ∞

11. lim $(\frac{3x^2}{2} - \frac{7}{5}x + 12)$
x→- 2

12. lim $(\frac{3x^2}{2} + 5x - 1)$
x→ 2

13. lim $(\frac{1x^2}{2} + \frac{5x}{4} + 1/2)$
x→ 3

14. lim $(\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{5} + 7/2)$
x→ -1

15. lim $(\frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} + 5)$
x→ 2/3

16. lim $(2x^2 + 3x - 10)$
x→ ½

17. lim $(7x^2 + 3\,x - 2)$
x→ -1/3

18. lim $(7/3x^2 + 3/5\,x - 2\,)$
x→ 0

19. lim $(\frac{5x^3}{3} + \frac{2}{5}x^2 - 3/4x - 1\,)$
x→ 0

Desarrolle los siguientes límites:

20.- Lim. $(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x})$
x→0

21.- Lim. $(\frac{\sqrt{5+x}-6}{2x})$
x→0

22.- Lim. $(\frac{\sqrt{21+x}-4}{x^2})$
x→0

23.- Lim. $(\frac{\sqrt{11+2x}-5}{x^2-2x})$
x→0

Resuelve los siguientes límites:

24.- Lim. $(\frac{5x^4+7x^2-8}{x^3+2x^2-3})$
x→ ∞

25.- Lim. $(\frac{7x^6+7x^3-2x}{4x^3+8x^2-5})$

x→ ∞

26.- Lim. $\left(\frac{-2x^5+73x-2x}{6x^3+4x^2-3}\right)$

x→ ∞

27.- Lim. $\left(\frac{-x^5+3x-x}{x^3+x^2-4}\right)$

x→ ∞

28.- Lim. $\left(\frac{-x^5+3x^3-x}{x^5+10x^2-3}\right)$

x→ ∞

29.- Lim. $\left(\frac{12x^3+3x^2-5x}{3x^3+14x^2-1}\right)$

x→ ∞

30.- Lim. $\left(\frac{15x^3+31x^2-50x}{30x^3+14x^2-1}\right)$

x→ ∞

31.- Lim. $\left(\frac{24x^3+3x^2-4x}{18x^3+5x^2-1}\right)$

x→ ∞

32. lim $\left(\frac{3x^3+9x-7}{2x^4-5x+12}\right)$

x→∞

33. lim $\left(\frac{5x^3+9x-7}{2x^6-3x+14}\right)$

x→∞

34. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{10x^{2}+8x-17}{20x^{4}-13x+10}\right)$

35. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{13x^{2}+18x-21}{5x^{4}-3x^{2}+11x}\right)$

Resuelve los siguientes límites:

36. $\lim\limits_{x\to\infty} = \sqrt{2x^2+3x+1} - (2x+3)$

37. $\lim\limits_{x\to\infty} = \sqrt{5x^2+3/2x+2} - (4x-5)$

38. $\lim\limits_{x\to\infty} = (\sqrt{5x+2} - \sqrt{5x-2})$

39. $\lim\limits_{x\to\infty} = (\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{3x-1})$

40. $\lim\limits_{x\to\infty} = (\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-2x})$

41. $\lim\limits_{x\to\infty} = (\sqrt{x^2-5x+5} - \sqrt{x^2-5x+2})$

Resuelve los siguientes límites:

42. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{5x^2+x-7}{-2x^2+3x+10}\right)$

43. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{7x^3+x^2+2x+15}{2x^3+3x^2+8}\right)$

44. $\lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{x^3+2x^2-15}{x^3+x^2+2}\right)$

45. $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{3x^3+5x^2-11}{x^3+x^2+3}\right)$

46. $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}\right)$

47. $\lim\limits_{x \to -3} \left(\frac{8x^3+1}{2x^2+9x+4}\right)$

48. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{8x^3-27}{2x^2+9x+4}\right)$

49. $\lim\limits_{x \to -4} \left(\frac{8a^3-125}{4a^2-4a-15}\right)$

Desarrolla los siguientes límites:

50. $\lim \left(\frac{2}{\sqrt[2]{2x^4-3x^2}}\right)(2x -5)$

x→-∞

51. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{\sqrt[2]{x^4-2x^2+5x-3}} \right)(3x^2 -2)$

52. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{7}{\sqrt[2]{x^4-x^2+2x-1}} \right)(x^2 +3x-5)$

53. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4}{\sqrt[2]{2x^4-3x^2+5x-10}} \right)(4x^2 +5x-10)$

Resuelve los siguientes límites:

54. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+2x+3}{x^2-1} \right)^{2x}$

55. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^2+2x}{x^2+2x-2} \right)^{3x}$

56. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4x^2+3x-2}{4x^2+x-1} \right)^{4x}$

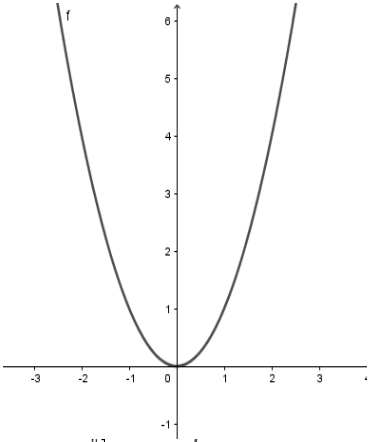
57. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2} \right)^{5x}$

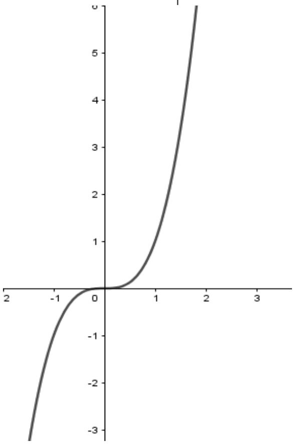
58. lim $\quad (x^2 + 3x - 2)^{2x}$
x→ 1

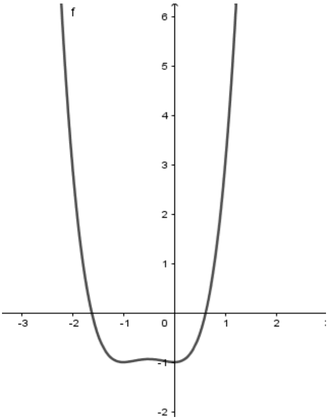
59. lim $\quad (\frac{3x^2+4x-1}{3x^2+x-3})^{6x}$
x→ 2

En cada una de las gráficas de funciones escriba si es una función continúa o discontinua su dominio y rango.

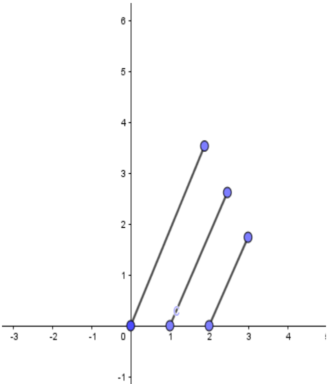
60. 61.
62

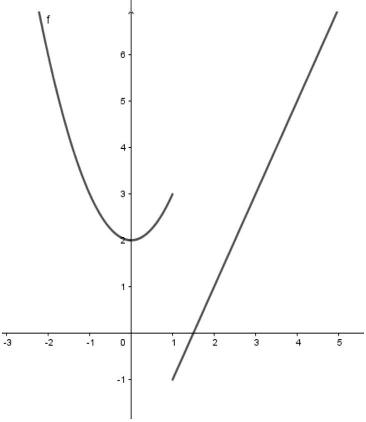

f

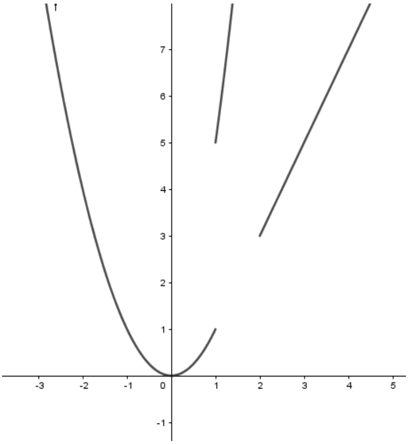




63. 64
65


6
5
4
3
2
1
-1
-3 -2 -1 0 1 2 3 4


f
6
5
4
3
2
1
-1
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5



66. Determine si la función dada f(x) =

$\frac{x^2+3x-1}{4}$, es continua en los puntos 1 y -3

67. Determine si la función dada f(x) =

$\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x-3}$, es continua en los puntos -2, 1 y 3

68. Determine si la función dada f(x) =

$\frac{x^2-1}{x^2+5x+3}$, es continua en los puntos -2 y 1

69. Determine si la función dada f(x) =

$\frac{6x^2+7x-3}{4x^2-4x-15}$, es continua en los puntos -2, -1, 2 y 3

3.7. Actividades de refuerzo del capítulo.

1. Complete:

a) A los limites laterales se los puede calcular por la izquierda y por la.............................

b) Se nos pueden presentar limites sin indeterminaciones y con..................................

c) Una función es continua cuando............................y es discontinua cuando...................

2. Determine el límite lateral de $\lim_{x \to 4} \begin{cases} 2x-3, \text{ si } x<4 \\ x^2-2x+3, \text{ si } x\geq 4 \end{cases}$

3. Realice el proceso para verificar la respuesta de los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-3x}}{2x}\right)$ Rta. 0

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2+4x+5}{3x^2+2}\right)$ Rta. 1

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{4x^3+3x^2-2x+1}{2x^2+3x+1}\right)$ Rta. - ∞

d) $\lim\limits_{x \to 5} \left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)$ Rta. 4

e) $\lim\limits_{x \to -1/2} \left(\frac{6x^2-5x-4}{2x+1}\right)$ Rta. -11/2

4. Realice la gráfica de las siguientes funciones y escriba si son continuas o discontinuas con su correspondiente razonamiento.

a) $f(x) = 2x^2-3x+2$

b) $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{2x^2+4x+3}{x^2-3}$

d) f(x) = $\frac{x^2+2x-4}{x^2-1}$

e) f(x) = $\begin{cases} 2x-1, \text{ si } x<2 \\ x^2-4x+2, \text{ si } x\geq 2 \end{cases}$

f) f(x) = $\begin{cases} 2x-1, \text{ si } x<1 \\ x^2+6, \text{ si } x\geq -1 \\ 3x+2, \text{ si} x>2 \end{cases}$

g) f(x) = $\sqrt{x^2+6x+9}$

h) f(x) = $\sqrt{3x^2-2x+1}$

i) f(x) = $\frac{\sqrt{2x^2+3x-3}}{x^2-3}$

j) f(x) = $\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt{2x+4}}$

k) g(x) = $\frac{x^2-2x+4}{x^2-2}$

l) f(x) = $\begin{cases} x-1, \text{ si } x<3 \\ x^2-5x+1, \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$

m) $f(x) = \begin{cases} 3x-1, \text{ si } x<2 \\ x^2 + 3, \text{ si } x \geq -2 \\ 4x + 1, \text{ si} x>3 \end{cases}$

n) $f(x) = -x^2-5x+2$

o) $g(x) = 4x^2+6x-3$

CAPÍTULO.4.

4.1. Introducción a la derivada general.

En el estudio de la derivada de funciones se distinguen dos aspectos: En el primero el concepto de derivada, sus interpretaciones y aplicaciones. En el segundo, la derivación de funciones que se plantea como un algoritmo basado en un cuadro que permite realizar la derivación de cualquier función, sea cual sea su expresión. Entendemos que debe hacerse mucho hincapié en la primera parte pues lo realmente interesante de la derivada son la gran cantidad de situaciones que resuelve y que no se podrían abordar si no están bien claros los conceptos. Por esto hay que verificar que los estudiantes han captado, no solo la definición, sino sobre todo su interpretación geométrica que será la clave para comprender gran parte de sus aplicaciones y los cambios en la velocidad media e instantánea de cualquier objeto para comprender con facilidad este capítulo utilizaré algunos conceptos o palabras claves.

Palabras claves.

Derivar una función. Es un elemento utilizado en la matemática para calcular respuestas de una función a la que se le están alterando sus valores iniciales. La derivada de una función está representada gráficamente como una línea recta superpuesta sobre cualquier curva (función), el valor de esta pendiente respecto al eje sobre el cual está siendo estudiada la función recibe el nombre de derivada.

Derivada de una constante. Es igual a cero.

Derivada de una variable con exponente uno. Es igual a uno.

Derivada de una adición y sustracción de funciones. Es igual a la derivada de cada uno de sus términos

Fórmula:

$$\frac{d[f(x)\pm g(x)]}{d(x)} = \frac{d.f(x)}{d(x)} \pm \frac{d.g(x)}{d(x)}$$

Pendiente. Es la inclinación de un elemento lineal, natural o constructivo respecto de la horizontal.

Fórmula.

$$m = \frac{(y2-y1)}{(x2-x1)}$$

Ecuación tangente. La recta tangente tiene por pendiente f'(xo); se define en [(xo, f(xo)]; solo está definida si f es derivable en x0.

Fórmula: y – y1 = m (x – x1)

Ecuación normal. La recta normal pasa por [(xo, f (xo)] y es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Si se tienen dos rectas L1 y L2 perpendiculares y m1 es la pendiente de L1, entonces la pendiente de la recta normal será – 1/m, por lo tanto m_{normal} = - 1/f´(xo)

Fórmula: y –y1 = $\frac{-1\ (x-x1)}{m}$

Variación de una función. Dada una **función** f (x), se define **variación de la función** entre dos puntos de su dominio x_1 y x_2, siendo $x_1 < x_2$, a la diferencia f (x_2) - f (x_1). Cuando esta diferencia es positiva, la función es **creciente** en el punto; si es negativa, la función es **decreciente**.

Velocidad media ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$). Donde, Δy y Δx miden los cambios en los ejes respectivos.

El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es conocido como cociente incremental, el cual indica el incre mento de la variable y con respecto a x. El valor de este cociente coincide con la **pendiente** de la **recta** que pasa por los puntos de coordenadas [a, f (a)] y [b, f (b)].

Cuando los dos puntos del intervalo [a, b] están lo suficientemente próximos entre sí, el cociente anterior indica la **velocidad instantánea** de la función. En tal caso, el valor de b se expresaría como b = a + h, siendo h un valor infinitamente pequeño.

Ejemplos desarrollados.

1. Un cuerpo se mueve según la ecuación y= $16t^2$, si la distancia se mide en metros, determi na la velocidad media considerando los 5 primeros segundos de caída.

Por lo tanto b= 5 y que a= 0

V.M =$\frac{16(5)^2-16(0)^2}{5-0}$

V.M =$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

V.M =$\frac{16(25)-16(0)}{5}$

V.M =$\frac{400-0}{5}$

V.M =$\frac{400}{5}$

V.M = 80 $\frac{m}{s}$

Solución. La velocidad media del cuerpo a los 5 primeros segundos de recorrido es de 80 $\frac{m}{s}$

2. Un móvil se mueve según la ecuación: $y = 50t^2$, donde la distancia se mide en metros, determina la velocidad media considerando los 4 primeros segundos de caída.

Por lo tanto b= 4 y que a= 0

$$V.M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$V.M = \frac{50(4)^2-50(0)^2}{4-0}$$

$$V.M = \frac{50(16)-50(0)}{4}$$

$$V.M = \frac{800-0}{4}$$

$$V.M = \frac{800}{4}$$

$$V.M = 200\ \frac{m}{s}$$

Solución. La velocidad media del cuerpo a los 4 primeros segundos de recorrido es de 200 $\frac{m}{s}$

4.2. Reglas generales para derivar funciones.

1.- Se incrementa (sustituye) en la función f(x) en la variable (x+Δx) y se calcula el nuevo valor de la función (y+Δy).

2.- Se resta el valor dado de la función f(x) del nuevo valor (y+Δy) y se obtiene Δy

3.- Se divide incremento de y para incremento de x ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$), luego se procesa.

4.- Se calcula el límite en el resultado de ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) cuando el Δx tiende a 0, es decir Lim ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) ,

Δx 0

siendo el valor del límite determinando la derivación buscada. O también se puede aplicar la siguiente fórmula para derivar funciones en forma general: f´(x) = Lim ($\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$)

->0

Ejemplos desarrollados.

Ejercicio 1	Obtenga la derivada de y= $2x^2$-3x+1
1. Incremento	Y+Δy = $2(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+1$ Y+Δy = $2(x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x)$ -3x-3Δx+1 Y+Δy = $2x^2+4x\Delta x+2\Delta^2 x-3x-3\Delta x+1$
2. Resto	Y+Δy = $2x^2+4x\Delta x+2\Delta^2 x-3x-3\Delta x+1$ -y = $-2x^2$ 3x -1 Δy = $4x\Delta x+2\Delta^2 x-3\Delta x$
	($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) = $\frac{4x\Delta x+2\Delta^2 x-3\Delta x}{\Delta x}$